Combinación Lineal

Departamento de Matemáticas, CCIR/ITESM

10 de enero de 2011

Índice

5.1. Introducción

En este apartado se introduce uno de los conceptos más importantes del curso: el de combinación lineal entre vectores. Se establece la relación entre el problema de resolver un sistema de ecuaciones lineales y el problema de determinar si un vector es combinación lineal de un conjunto de vectores. El resultado clave indica que es equivalente buscar la solución a un sistema de ecuaciones lineales que determinar los valores de los coeficientes que multiplicando cada una de las columnas de la matriz de coeficientes y sumando los vectores resultantes da como resultado el vector de constantes del sistema.

5.2. Combinación lineal entre vectores

El curso de álgebra lineal puede a la vez considerarse aburrido por monotemático; el problema fundamental del álgebra lineal es resolver sistemas de ecuaciones lineales. Y por consiguiente, prácticamente la totalidad de los temas tiene como fin analizar los sistemas lineales y sus soluciones. Después del concepto de sistema de ecuaciones el segundo concepto en importancia es el de combinación lineal. Veamos cómo se motiva este concepto.

Ejemplo 5.1

Supongamos el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{rcrcl} 1\,x & + & (-1)\,y & = & 1 \\ 2\,x & + & 1\,y & = & 5 \end{array}$$

Sabemos que cada ecuación representa una línea recta en $\mathbf{R}^2$ y que la solución a él coincide con la intersección de las rectas. En la figura 1 se ilustra esta idea. Para buscar otra visión de la situación, sustituimos la solución $x = 2$ y $y = 1$:

$$\begin{array}{rcrcl} 1\,(2) & + & (-1)(1) & = & 1 \\ 2\,(2) & + & 1(1) & = & 5 \end{array}$$

En notación vectorial, lo anterior queda

$$\left(\begin{array}{r} 1\,(2) + (-1)\,(1) \\ 2\,(2) + 1\,(1) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 5 \end{array} \right)$$

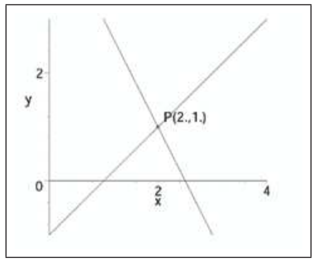

Figura 1: Solución como intersección de rectas

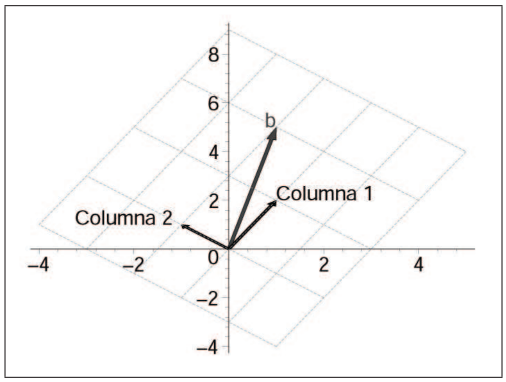

Figura 2: Solución como la forma de combinar las columnas

o también

$$\begin{pmatrix} 1\,(2) \\ 2\,(2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1\,(1) \\ 1\,(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

o también

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

En la figura 2 se muestran las columnas de la matriz y el vector de constantes: el *grid* nos sirve para indicar cómo obtener el vector de constantes combinando las columnas de la matriz ■

Desde el punto de vista de las columnas de la matriz de coeficientes y del vector de constantes:

> la solución al sistema de ecuaciones representa los coeficientes por los cuales hay que multiplicar a cada columna de la matriz de coeficientes para que al sumar resultados se obtenga el vector de constantes

Si la matriz de coeficientes es $\mathbf{A}$ y el vector de constantes es $\mathbf{b}$, la relación dice

$$x\,(\text{columna 1 de } \mathbf{A}) + y\,(\text{columna 2 de } \mathbf{A}) = (\text{vector de constantes})$$

5.3. Aplicación

Ejemplo 5.2

Continuemos con la empresa maquiladora del ejemplo anterior. Supongamos que la empresa construye ensambles tipo **D** y ensambles tipo **E**. Para construir un ensamble **D** requiere 3 **A**s, 4 **B**s y 2 **C**s. Y para construir un ensamble **E** requiere 5 **A**s, 3 **B**s y 2 **C**s. Un día notan que han usado 130 **A**, 111 **B**s y 64 **C**s para ensamblar **D**s y **E**s. ¿Cuántos **D**s y cuántos **E** han hecho?

Respuesta

En este caso buscamos los valores de x, el número de **D**s construidos, y de y, el número de **E**s construidos. Así debe cumplirse que:

$$x \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 130 \\ 111 \\ 64 \end{bmatrix}$$

Si desarrollamos e igualamos componente a componente tenemos que nuestro problema consiste en resolver el sistema

$$\begin{aligned} 3\,x + 5\,y &= 130 \\ 4\,x + 3\,y &= 111 \\ 2\,x + 2\,y &= 64 \end{aligned}$$

al formar la matriz aumentada y reducirla se obtiene

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 130 \\ 4 & 3 & 111 \\ 2 & 2 & 64 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 17 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

de donde la solución es $x = 15$ (15 del tipo **D**) y $y = 17$ (17 del tipo **E**). Nuevamente observamos que la solución $x = 15$ y $y = 17$ de

$$\left[\begin{array}{cc|c} \color{blue}{3} & \color{red}{5} & 130 \\ \color{blue}{4} & \color{red}{3} & 111 \\ \color{blue}{2} & \color{red}{2} & 64 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 17 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

representa los coeficientes por los cuales multiplicar las columnas de la matriz de coeficientes para que al sumar estos productos se obtenga el vector de términos constantes:

$$15 \begin{bmatrix} \color{blue}{3} \\ \color{blue}{4} \\ \color{blue}{2} \end{bmatrix} + 17 \begin{bmatrix} \color{red}{5} \\ \color{red}{3} \\ \color{red}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 130 \\ 111 \\ 64 \end{bmatrix} \blacksquare$$

Ejemplo 5.3

Siga con el ejemplo de la empresa maquiladora. Suponga ahora que bodega indica una existencia de $< 125, 110, 40 >$ y que se desean hacer ensambles **D** y **E** de manera que se consuma sin desperdicio toda la existencia. ¿Será posible?

Solución

Nuevamente buscamos valores de x y de y para que

$$x \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 125 \\ 110 \\ 40 \end{bmatrix}$$

Armando la matriz y reduciéndola obtenemos:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 125 \\ 4 & 3 & 110 \\ 2 & 2 & 40 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

De donde concluimos que al ser inconsistente el sistema, no existe forma de combinar múltiplos de $< 3, 4, 2 >$ y $< 5, 3, 2 >$ para dar $< 125, 110, 40 >$. Por tanto, no es posible hacer ensambles **D** y **E** de manera que se consuma sin desperdicio toda la existencia $\blacksquare$

5.4. Combinación Lineal

Demos ahora la definición de combinación lineal:

Definición 5.1

Sean $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$, vectores n y sean $c_1, c_2, \ldots, c_k$ escalares. El vector de la forma

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_k\vec{v}_k$$

se llama *combinación lineal* de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$. Los escalares $c_1, c_2, \ldots, c_k$ se llaman *coeficientes de la combinación lineal*.

5.5. SEL vs Combinaciones Lineales

El siguiente es el segundo resultado clave del curso:

Resultado clave

> Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las incógnitas de un sistema cuya matriz de coeficientes es $\mathbf{A}$ y cuyo vector de constantes es $\mathbf{b}$, siendo también $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ las columnas de $\mathbf{A}$ entonces:
>
> $$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \leftrightarrow x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

Es decir, el sistema tiene solución si y sólo si $\mathbf{b}$ es una combinación lineal de las columnas de la matriz $\mathbf{A}$. La solución del sistema es el vector formado por coeficientes de la combinación lineal de las columnas de $\mathbf{A}$ que dan $\mathbf{b}$.

Ejemplo 5.4

Indique si el vector $\mathbf{y}$ es combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$. Donde:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 24 \\ 8 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -24 \\ -8 \end{bmatrix}$$

Solución

La pregunta consiste en saber si existen escalares c_1, c_2 y c_3 (tres escalares por ser tres vectores) tales que:

$$c_1\,\mathbf{v}_1 + c_2\,\mathbf{v}_2 + c_3\,\mathbf{v}_3 = \mathbf{y}$$

Sustituyendo los vectores, la relación anterior queda:

$$c_1 \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 24 \\ 8 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} -24 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

La matriz aumentada del sistema anterior queda con eliminación Gaussiana:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 24 & -24 & 6 \\ 2 & 8 & -8 & 3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Como el sistema anterior es inconsistente, no existen c_1, c_2, y c_3 que hagan que se cumpla :

$$c_1\,\mathbf{v}_1 + c_2\,\mathbf{v}_1 + c_3\,\mathbf{v}_1 = \mathbf{y}$$

Por lo tanto, el vector $\mathbf{y}$ no es combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$.

Ejemplo 5.5

Indique si el vector $\mathbf{y}$ es combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$. Donde:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 38 \\ 41 \\ 29 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Solución
La pregunta consiste en saber si existen escalares c_1 y c_2 (tres escalares por ser tres vectores) tales que:

$$c_1\,\mathbf{v}_1 + c_2\,\mathbf{v}_2 = \mathbf{y}$$

La matriz aumentada del sistema anterior queda con eliminación Gaussiana:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 6 & 2 & 38 \\ 5 & 4 & 41 \\ 1 & 6 & 29 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Como el sistema anterior es consistente, sí existen c_1 y c_2 ($c_1 = 5$ y $c_2 = 4$), que hacen que se cumpla :

$$c_1\,\mathbf{v}_1 + c_2\,\mathbf{v}_2 = \mathbf{y}$$

Por lo tanto, el vector **y sí** es combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ ■

Nota
Es conveniente observar, por el trabajo que pude ahorrar, cómo se forma la matriz aumentada del sistema directamente de los datos.

- La matriz de coeficientes se forma con los vectores que se deben combinar. Estos *entran* como columnas en orden de aparición.
- El vector de constantes es el vector que uno se pregunta si es combinación lineal de los vectores dados.

Si acaso el sistema formado es consistente, el vector sí es combinación lineal de los vectores dados. Si el sistema es incosistente, el vector no es combinación lineal.

Ejemplo 5.6
Indique si el primer vector es combinación lineal de los restantes:

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 24 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Solución
La matriz aumentada y trabajada queda:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 12 \\ 5 & 4 & 24 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|r} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -4 \end{array}\right]$$

Como el sistema es consistente, el vector sí es combinación lineal de los restantes ■

Ejemplo 5.7
Indique si el sistema $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ es consistente para todos los vectores $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^3$ si $\mathbf{A}$ es la matriz:

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & -3 \\ 5 & 5 & -5 \\ -5 & -5 & -3 \end{bmatrix}$$

Solución
Supongamos un vector $\mathbf{b}$ en $\mathbf{R}^3$ cualquiera. Digamos que $\mathbf{b} =< b_1, b_2, b_3 >$. Nuestro problema consiste en determinar cómo deben ser b_1, b_2 y b_3 para que el sistema $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ sea consistente. Esperamos dos posibles tipos de respuesta:

- Que no importa como sean b_1, b_2 y b_3 el sistema es consistente. ó

- Que b_1, b_2 y b_3 deben cumplir cierta relación para que se cumpla la consistencia y que no todos los puntos posibles de $\mathbf{R}^3$ la cumplen.

Recordemos que el análisis de consistencia de un sistema se obtiene de la matriz escalonada y por ello no se requiere la forma escalonada reducida. Para escalonar siguiremos una estrategia tipo Montante manteniendo la aritmética totalmente con números enteros. Así para hacer cero en las posiciones $(2,1)$ y $(3,1)$ lo que hacermos es hacer que tales posiciones se hagan un múltiplo del elemento $(1,1)$. Aplicando $R_2 \leftarrow 4R_2$ y $R_3 \leftarrow 4R_3$ obtenemos:

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{rrr|c} -4 & 1 & -3 & b_1 \\ 5 & 5 & -5 & b_2 \\ -5 & -5 & -3 & b_3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{rrr|c} -4 & 1 & -3 & b_1 \\ 20 & 20 & -20 & 4\,b_2 \\ -20 & -20 & -12 & 4\,b_3 \end{array}\right]$$

Ahora procederemos a hacer cero bajo el pivote mediante las operaciones $R_2 \leftarrow R_2 + 5R_1$ y $R_3 \leftarrow R_3 - 5R_1$:

$$\left[\begin{array}{rrr|c} -4 & 1 & -3 & b_1 \\ 20 & 20 & -20 & 4\,b_2 \\ -20 & -20 & -12 & 4\,b_3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{rrr|c} -4 & 1 & -3 & b_1 \\ 0 & 25 & -35 & 5\,b_1 + 4\,b_2 \\ 0 & -25 & 3 & -5\,b_1 + 4\,b_3 \end{array}\right]$$

Para hacer un cero en la posición $(3,2)$ haremos $R_3 \leftarrow R_3 + R_2$ obteniéndose:

$$\left[\begin{array}{rrr|c} -4 & 1 & -3 & b_1 \\ 0 & 25 & -35 & 5\,b_1 + 4\,b_2 \\ 0 & -25 & 3 & -5\,b_1 + 4\,b_3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{rrr|c} -4 & 1 & -3 & b_1 \\ 0 & 25 & -35 & 5\,b_1 + 4\,b_2 \\ 0 & 0 & -32 & 4\,b_2 + 4\,b_3 \end{array}\right]$$

Observamos que las posiciones de los pivotes son $(1,1)$, $(2,2)$ y $(3,3)$, y por tanto no hay posibilidad de tener un pivote en la columna de las constantes. Por tanto, no importa cual sea el vector $\mathbf{b} =< b_1, b_2, b_3 >$ el sistema $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ es siempre consistente ■

Ejemplo 5.8

Indique si el sistema $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ es consistente para todos los vectores $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^3$ si $\mathbf{A}$ es la matriz:

$$\left[\begin{array}{rrr} -4 & -3 & -6 \\ 5 & -5 & 25 \\ -2 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

Solución

Como en el problema anterior, busquemos escalonar $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ donde $\mathbf{b} =< b_1, b_2, b_3 >$ representa un vector arbitrario de $\mathbf{R}^3$. Haciendo $R_2 \leftarrow 4R_2$ y $R_3 \leftarrow 2R_3$ sobre $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ obtenemos:

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{rrr|c} -4 & -3 & -6 & b_1 \\ 5 & -5 & 25 & b_2 \\ -2 & -3 & 0 & b_3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{rrr|c} -4 & -3 & -6 & b_1 \\ 20 & -20 & 100 & 4\,b_2 \\ -4 & -6 & 0 & 2\,b_3 \end{array}\right]$$

Ahora haciendo $R_2 \leftarrow R_2 + 5R_1$ y $R_3 \leftarrow R_3 - R_1$ obtenemos:

$$\left[\begin{array}{rrr|c} -4 & -3 & -6 & b_1 \\ 20 & -20 & 100 & 4\,b_2 \\ -4 & -6 & 0 & 2\,b_3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{rrr|c} -4 & -3 & -6 & b_1 \\ 0 & -35 & 70 & 5\,b_1 + 4\,b_2 \\ 0 & -3 & 6 & -b_1 + 2\,b_3 \end{array}\right]$$

Ahora haciendo $R_3 \leftarrow 35R_3$ obtenemos:

$$\left[\begin{array}{rrr|c} -4 & -3 & -6 & b_1 \\ 0 & -35 & 70 & 5\,b_1 + 4\,b_2 \\ 0 & -3 & 6 & -b_1 + 2\,b_3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{rrr|c} -4 & -3 & -6 & b_1 \\ 0 & -35 & 70 & 5\,b_1 + 4\,b_2 \\ 0 & -105 & 210 & -35\,b_1 + 70\,b_3 \end{array}\right]$$

Ahora haciendo $R_3 \leftarrow R_3 - 3\,R_2$ obtenemos:

$$\left[\begin{array}{rrr|c} -4 & -3 & -6 & b_1 \\ 0 & -35 & 70 & 5\,b_1 + 4\,b_2 \\ 0 & -105 & 210 & -35\,b_1 + 70\,b_3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{rrr|c} -4 & -3 & -6 & b_1 \\ 0 & -35 & 70 & 5\,b_1 + 4\,b_2 \\ 0 & 0 & 0 & -50\,b_1 - 12\,b_2 + 70\,b_3 \end{array}\right]$$

de donde la consistencia depende del valor de la expresión $-50\,b_1 - 12\,b_2 + 70\,b_3$:

- $-50\,b_1 - 12\,b_2 + 70\,b_3 = 0$ da consistencia:
  todo vector $\mathbf{b} =< b_1, b_2, b_3 >$ de $\mathbf{R}^3$ que cumpla $-50\,b_1 - 12\,b_2 + 70\,b_3 = 0$ nos dará un sistema $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ consistente.

- $-50\,b_1 - 12\,b_2 + 70\,b_3 \neq 0$ da inconsistencia:
  todo vector $\mathbf{b} =< b_1, b_2, b_3 >$ de $\mathbf{R}^3$ que cumpla $-50\,b_1 - 12\,b_2 + 70\,b_3 \neq 0$ nos dará un sistema $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ inconsistente. Por ejemplo, tomando $\mathbf{b} =< 1, 0, 0 >$ dará $b_1 = 1$, $b_2 = 0$ y $b_3 = 0$, que al ser sustituidos en la expresión dan como resultado:

  $$-50\,b_1 - 12\,b_2 + 70\,b_3 = -50(1) - 12(0) + 70(0) = -50 \neq 0$$

  lo cual indica que $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ es inconsistente.

Resumiendo, para la matriz $\mathbf{A}$ se cumple que es falso que para todos los vectores $\mathbf{b}$ de $\mathbf{R}^3$ el sistema $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ es consistente ■