Problemas sobre indeterminaciones

CURSO	**TEMA**	**WWW.DANIPARTAL.NET**
1ºBach CCSS	Funciones y Límite	Colegio Marista "La Inmaculada" de Granada

PROBLEMA 1

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1}=\frac{0}{2}=0$

b) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x-1}{x+1}=\frac{-2}{0}=\infty\rightarrow$ Calculamos límites laterales

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{x-1}{x+1}=\frac{-2}{0^-}=+\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{x-1}{x+1}=\frac{-2}{0^+}=-\infty$$

c) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3+2x^2-3x}{x^3+4x^2+x-6}=evaluar=\frac{27+18-9}{27+36+3-6}=\frac{36}{60}=\frac{3}{5}$

PROBLEMA 2

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3+2x^2-3x}{x^3+4x^2+x-6}$ **b)** $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^3+2x^2-3x}{x^3+4x^2+x-6}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{3-x}$

d) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{2x-8}{\sqrt{x^2+9}-5}$ **e)** $\lim\limits_{x\to 2} \frac{3-\sqrt{2x^2+1}}{3x-6}$

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3+2x^2-3x}{x^3+4x^2+x-6} = \frac{1+2-3}{1+4+1-6} = \frac{0}{0} \to$ Indeterminación

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+2x^2-3x}{x^3+4x^2+x-6} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+3x)}{(x-1)(x^2+5x+6)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+3x}{x^2+5x+6} = \frac{1+3}{1+5+6} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

b) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^3+2x^2-3x}{x^3+4x^2+x-6} = \frac{-27+18+9}{-27+36-3-6} = \frac{0}{0} \to$ Indeterminación

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^3+2x^2-3x}{x^3+4x^2+x-6} = \lim_{x\to -3} \frac{(x+3)(x^2-x)}{(x+3)(x^2+x-2)} = \lim_{x\to -3} \frac{x^2-x}{x^2+x-2} = \frac{9+3}{9-3-2} = \frac{12}{4} = 3$$

c) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{3-x} = \frac{\sqrt{9}-3}{3-3} = \frac{0}{0} \to$ Indeterminación

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{3-x} = \lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(3-x)(\sqrt{x+6}+3)} = \lim_{x\to 3} \frac{x+6-9}{(3-x)(\sqrt{x+6}+3)}$$

Operar numerador.

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{(3-x)(\sqrt{x+6}+3)} = \lim_{x\to 3} \frac{-1}{\sqrt{x+6}+3} = \frac{-1}{\sqrt{9}+3} = \frac{-1}{6}$$

d) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{2x-8}{\sqrt{x^2+9}-5} = \frac{2\cdot 4-8}{\sqrt{25}-5} = \frac{0}{0} \to$ Indeterminación

$\lim\limits_{x\to 4} \frac{2x-8}{\sqrt{x^2+9}-5} = \lim\limits_{x\to 4} \frac{(2x-8)(\sqrt{x^2+9}+5)}{(\sqrt{x^2+9}-5)(\sqrt{x^2+9}+5)} \to$ Operar denominador

$\lim\limits_{x\to 4} \frac{(2x-8)(\sqrt{x^2+9}+5)}{x^2-16} = \lim\limits_{x\to 4} \frac{(2x-8)(\sqrt{x^2+9}+5)}{(x+4)(x-4)} \to$ Operar numerador

$$\lim_{x\to 4} \frac{(2x-8)(\sqrt{x^2+9}+5)}{(x+4)(x-4)} = \lim_{x\to 4} \frac{2(x-4)(\sqrt{x^2+9}+5)}{(x+4)(x-4)} = \lim_{x\to 4} \frac{2(\sqrt{x^2+9}+5)}{(x+4)} = \frac{2(\sqrt{25}+5)}{4+4} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$$

e) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{3-\sqrt{2x^2+1}}{3x-6} = \frac{0}{0} \to$ Indeterminación

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{3-\sqrt{2x^2+1}}{3x-6} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(3-\sqrt{2x^2+1})(3+\sqrt{2x^2+1})}{(3x-6)(3+\sqrt{2x^2+1})} \to$ Operar numerador

$$\lim_{x\to 2} \frac{9-(2x^2+1)}{(3x-6)(3+\sqrt{2x^2+1})} = \lim_{x\to 2} \frac{-2x^2+8}{(3x-6)(3+\sqrt{2x^2+1})} = \lim_{x\to 2} \frac{-2(x^2-4)}{(3x-6)(3+\sqrt{2x^2+1})}$$

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{-2(x+2)(x-2)}{(3x-6)(3+\sqrt{2x^2+1})} \to$ Operar denominador

$$\lim_{x\to 2} \frac{-2(x+2)(x-2)}{3(x-2)(3+\sqrt{2x^2+1})} = \lim_{x\to 2} \frac{-2(x+2)}{3(3+\sqrt{2x^2+1})} = \frac{-2(2+2)}{3(3+\sqrt{2(2)^2+1})} = \frac{-8}{18} = \frac{-4}{9}$$

PROBLEMA 3

Resuelve:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x^2-3x+2}{2x^2+x-1}$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+6}{3x^3-x+5}$ **c)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{13x^2-x}{\sqrt{169x^4-x^2+8}}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x^2-3x+2}{2x^2+x-1} = \frac{\infty}{\infty} \to$ Indeterminación

Cociente de polinomios del mismo grado.

Divido todo por la máxima potencia.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x^2/x^2-3x/x^2+2/x^2}{2x^2/x^2+x/x^2-1/x^2} \to$ simplifico $\to \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5-3/x+2/x^2}{2+1/x-1/x^2}$

Evalúo recordando que $k/\infty = 0 \to \frac{5-3/\infty+2/\infty}{2+1/\infty-1/\infty} = \frac{5-0+0}{2+0-0} = \frac{5}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+6}{3x^3-x+5} = \frac{+\infty}{+\infty} \to$ Indeterminación

Grado del numerador menor que el Grado del denominador.

Divido todo por la máxima potencia.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x/x^3+6/x^3}{3x^3/x^3-x/x^3+5/x^3} \to$ simplifico $\to \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2/x^2+6/x^3}{3-1/x^2+5/x^3}$

Evalúo recordando que $k/\infty = 0 \to \frac{2/\infty+6/\infty}{3-1/\infty+5/\infty} = \frac{0}{3} = 0$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{13x^2-x}{\sqrt{169x^4-x^2+8}} = \frac{\infty}{\infty} \to$ Indeterminación

El mayor grado que aparece en el cociente es x^2, porque el factor x^4 dentro de la raíz cuadrada se comporta como un polinomio de grado 2.

Divido todo por la máxima potencia. Cuando x^2 entra dentro de la raíz cuadrada, lo hace como x^4.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{13x^2/x^2-x/x^2}{\sqrt{169x^4/x^4-x^2/x^4+8/x^4}} \to$ simplifico $\to \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{13-1/x}{\sqrt{169-1/x^2+8/x^4}}$

Evalúo recordando que $k/\infty = 0 \to \frac{13-1/\infty}{\sqrt{169-1/\infty+8/\infty}} = \frac{13-0}{\sqrt{169-0+0}} = \frac{13}{\sqrt{169}} = \frac{13}{13} = 1$

PROBLEMA 4

Calcula $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}-\frac{2+x}{1+x}\right)$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}-\frac{2+x}{1+x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)-\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2+x}{1+x}\right)=1-1=0$$

El límite de la diferencia es la diferencia de los límites. Y en cada término tenemos un cociente de polinomios del mismo grado en numerador y denominador, por lo que el resultado es el cociente de los coeficientes que acompañan a las máximas potencias.

PROBLEMA 5

Sea $f(x)=\frac{x^2-7x+10}{x^2-4x-5}$. Estudia la continuidad en $x=-1$ y en $x=5$. Calcula $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

Estudiemos la continuidad de la función en $x=-1$.

$\nexists f(-1)$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2-7x+10}{x^2-4x-5} = \lim_{x\to -1^-} \frac{x^2-7x+10}{(x+1)(x-5)} = \frac{18}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2-7x+10}{x^2-4x-5} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2-7x+10}{(x+1)(x-5)} = \frac{18}{0^-} = -\infty$$

Discontinuidad no evitable de primera especie de salto infinito en $x=-1$.

Estudiemos la continuidad de la función en $x=5$.

$\nexists f(5)$

$$\lim_{x\to 5^-} \frac{x^2-7x+10}{x^2-4x-5} = \lim_{x\to 5^-} \frac{(x-2)(x-5)}{(x+1)(x-5)} = \lim_{x\to 5^-} \frac{x-2}{x+1} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 5^+} \frac{x^2-7x+10}{x^2-4x-5} = \frac{1}{2}$$

Discontinuidad evitable en $x=5$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$$

Ya que tenemos un cociente de polinomios de grado dos, donde los coeficientes que acompañan a x^2 en el numerador y en el denominador es 1. Por lo que el límite coincide con el cociente de coeficientes que acompañan a la máxima potencia.

PROBLEMA 6

Estudia la continuidad de la función en $x = -2$ y en $x = 3$.

$$f(x) = \begin{Bmatrix} 2 \ si \ x < -2 \\ -x^2 + 6 \ si \ -2 \le x \le 3 \\ 1 \ si \ x > 3 \end{Bmatrix}$$

$\exists f(-2) = -(-2)^2 + 6 = -4 + 6 = 2$

$\lim_{x \to -2^-} 2 = 2$

$\lim_{x \to -2^+} (-x^2 + 6) = 2$

$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^+} f(x) = 2 = L$

$f(-2) = 2 = L$

Función continua en $x = -2$

$\exists f(3) = -(3)^2 + 6 = -9 + 6 = -3$

$\lim_{x \to 3^-} (-x^2 + 6) = -3$

$\lim_{x \to 3^+} 1 = 1$

$\lim_{x \to 3^-} f(x) = -3 \neq 1 = \lim_{x \to 3^+} f(x)$

Discontinuidad no evitable de primera especie de salto finito en $x = 3$

PROBLEMA 7

Determina a y b para que la función sea continua en los puntos frontera.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 \;\; si \;\; x<0 \\ a\,x+b \;\; si \;\; 0\leq x\leq 3 \\ \dfrac{x^2-9}{x-3} \;\; si \;\; x>3 \end{cases}$$

La función es continua en $x=0$ si se cumplen los siguientes requisitos.

$\exists f(0)=a\cdot 0+b=b$

$\lim_{x\to 0^-}(x^2+1)=0+1=1$

$\lim_{x\to 0^+}(ax+b)=b$

Límites laterales iguales $\to b=1\to$ Existe el límite y vale $L=1$

$f(0)=1=L$

La función es continua en $x=3$ si se cumplen los siguientes requisitos.

$\exists f(3)=a\cdot 3+b=3a+1$

$\lim_{x\to 3^-}(ax+b)=3a+1$

$\lim_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\dfrac{(x+3)(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}(x+3)=6$

Límites laterales iguales $\to 3a+1=6\to a=\frac{5}{3}$

$f(3)=6=L$

PROBLEMA 8

Calcula el valor de k para que la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} & si\ \ x \neq 1\ y\ x \neq 2 \\ -\sqrt{2k+1} & si\ \ x = 1 \end{cases}$ sea continua en $x = 1$.

Aplicamos las tres condiciones de continuidad de una función en un punto.

$\exists f(1) = -\sqrt{2k+1}$

$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \frac{0}{0} \to$ Indeterminación $\to \lim_{x\to 1^-} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x+1)}{(x-2)} = -2$

$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \frac{0}{0} \to$ Es el mismo límite de antes $\to \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = -2$

Igualamos los límites laterales $\to L = -2 = -2$

Y comprobamos que la imagen en el punto coincide con el límite:

$f(1) = L - 2 = -\sqrt{2k+1} \to 4 = 2k + 1 \to k = \frac{3}{2}$

PROBLEMA 9

Analiza la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} \boldsymbol{bx^2 + ax \ \ si \ \ x < -1} \\ \boldsymbol{\frac{a}{x} \ \ si \ -1 \le x < 1, \ x \neq 0} \\ \boldsymbol{\frac{x^2+ax+1}{x+1} \ \ si \ \ x > 1} \end{cases}$ **en los puntos frontera $x = -1$ y $x = 1$.**

$x < -1 \rightarrow$ función polinómica $\rightarrow$ continua en todo $\mathbb{R}$ $\rightarrow$ continua en $(-\infty, -1)$

$-1 < x < 1 \rightarrow$ función continua en $\mathbb{R} - \{0\} \rightarrow$ función continua en $(-1,1) - \{0\}$

$x > 1 \rightarrow$ función polinómica $\rightarrow$ continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$ $\rightarrow$ función continua en $(1, +\infty)$

Estudio en el punto frontera $x = -1$:

$f(-1) = \dfrac{a}{-1} = -a$

$\lim\limits_{x \to -1^-} bx^2 + ax = b - a$, $\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{a}{x} = \frac{a}{-1} = -a \rightarrow \quad b - a = -a \rightarrow b = 0$

$f(-1) = L \rightarrow -a = b - a \rightarrow b = 0$

Estudio en el punto frontera $x = 1$:

$\nexists f(1) \rightarrow$ ¡OJO! la función no toma ningún valor en $x = 1$ $\rightarrow$ función no definida para $x = 1$.

$\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{a}{x} = \frac{a}{1} = a$, $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x^2+ax+1}{x+1} = \frac{2+a}{2} \rightarrow a = \frac{2+a}{2} \rightarrow 2a = 2 + a \rightarrow a = 2$

Los límites laterales existen, coinciden y son finitos siempre que $a = 2$. Pero la función no está definida en $x = 1$. Estamos ante una discontinuidad evitable.

Por lo tanto en $x = 1$ la función no es continua.