Problemas – Tema 1

Problemas resueltos - 1 - típicos errores matemáticos

1. Resuelve $\frac{3x-3}{x-1}+\frac{x^2+2}{x+1}=\frac{7x+1}{x^2-1}$

Lo primero que hacemos es sacar el m.c.m de los denominadores:

$$x^2-1=(x-1)(x+1)$$
$$\frac{(3\text{x}-3)(x+1)}{(x-1)(x+1)}+\frac{((x)^2+2)(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{7x+1}{(x-1)(x+1)}$$

Operamos y ordenamos. Un error muy típico es no usar el m.c.m. en el denominador sino emplear el producto “a lo bruto” de todos los denominadores. Esto alarga el ejercicio y, si no se simplifica, puede llevar a soluciones que no sean válidas por anular algunos de los denominadores de la ecuación de partida.

$$\frac{3x^2+3x-3x-3+x^3-x^2+2x-2}{(x-1)(x+1)}=\frac{7x+1}{(x-1)(x+1)}$$

Igualamos numeradores:

$$x^3+3x^2-x^2-3x+3x+2x-7x-2-3-1=0$$
$$x^3+2x^2-5x-6=0$$

Hacemos Ruffini donde obtendremos tres raíces $-1,2,-3$. Las soluciones a nuestra ecuación de partida son $x=2,-3$. No tomamos $x=-1$ por anular algunos de los denominadores iniciales.

2. Simplifica $\frac{x^4-y^4}{3x^3y-3xy^3}$

Desarrollamos el numerador como el binomio suma por diferencia, mientras que en el denominador obtenemos factor común de $3x\cdot y$.

Ojo al sacar factor común. Debemos escribir $3x\cdot y$ fuera del paréntesis y dividir cada término original por este factor $3x\cdot y$.

$$\frac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}{3xy(x^2-y^2)}$$

Finalmente, simplificamos el factor (x^2-y^2) . Podemos simplificar porque el paréntesis (x^2-y^2) multiplica a todo el numerador y a todo el denominador.

$$\frac{x^2+y^2}{3xy}$$

3. Opera y simplifica $(a+b)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+(a-b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$.

Calculamos el m.c.m. de los denominadores y operamos.

$$(a+b)\left(\frac{b}{ab}-\frac{a}{ab}\right)+(a-b)\left(\frac{b}{ab}+\frac{a}{ab}\right) \rightarrow \frac{ab+b^2}{ab}-\frac{a^2+ab}{ab}+\frac{ab-b^2}{ab}+\frac{a^2-ab}{ab}$$

$$\frac{ab+b^2-a^2-ab+ab-b^2+a^2-ab}{ab}$$

Todos los términos del numerador cancelan, por lo que el resultado final queda 0.

4. Opera y simplifica.

$$\left(\frac{1-x}{3x-x^2}-\frac{x-1}{x^2-2x-3}\right)\frac{x^2+x}{x-1}$$

Factorizamos los distintos polinomios y operamos. Ojo al sacar factor común en el primer denominador.

$$\left(\frac{1-x}{x(3-x)}-\frac{x-1}{(x-3)(x+1)}\right)\frac{x(x+1)}{x-1} \rightarrow \left(\frac{x-1}{x(x-3)}-\frac{x-1}{(x-3)(x+1)}\right)\frac{x(x+1)}{x-1}$$

$$\frac{x+1}{(x-3)}-\frac{x}{(x-3)} \rightarrow \frac{1}{x-3}$$

5. Simplifica $\frac{x+2}{x^2-2x}-\frac{1}{x+2}-\frac{6x+4}{x^3-4x}$ **.**

Se descomponen los denominadores en factores para hallarles el mínimo común múltiplo, que será el común denominador.

$$\begin{array}{l} x^2-2x=x(x-2) \\ x+2 \\ x^3-4x=x(x^2-4)=x[(x+2)(x-2)] \end{array} \rightarrow m.c.m.(x^2-2x, x+2, x^3-4x)=x^3-4x$$

Dividimos el común denominador entre los denominadores de las fracciones dadas y el resultado lo multiplicamos por el numerador correspondiente.

$$\frac{(x+2)^2-1(x^2-2x)-6\mathrm{x}-4}{x[(x+2)(x-2)]}=\frac{x^2+4+4x-x^2+2x-6x-4}{x[(x+2)(x-2)]}$$

Todos los términos del numerador cancelan.

$\frac{0}{x[(x+2)(x-2)]}$ → Por lo que el resultado final queda igual a 0.

6. Opera y simplifica $(1-\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}):(\frac{x}{x-a}+\frac{x}{x+a})$.

$$(1-\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}):(\frac{x}{x-a}+\frac{x}{x+a}) \rightarrow (\frac{a^2-x^2-a^2-x^2}{a^2-x^2}):(\frac{x(x+a)+x(x-a)}{x^2-a^2})$$

$$(\frac{-2x^2}{a^2-x^2}):(\frac{x^2+ax+x^2-ax}{x^2-a^2}) \rightarrow (\frac{-2x^2}{a^2-x^2}):(\frac{2x^2}{x^2-a^2})$$

Sacamos signo negativo como factor común del primer denominador.

$$(\frac{-2x^2}{-(x^2-a^2)}):(\frac{2x^2}{x^2-a^2})$$

Simplificamos los signos negativos de la primera fracción.

$(\frac{2x^2}{x^2-a^2}):(\frac{2x^2}{x^2-a^2})$ $\rightarrow$ simplificamos todos los términos $\rightarrow$ 1

7. Simplifica $\left[\dfrac{x-\dfrac{x}{x-2}}{x+\dfrac{x}{x-2}}-\dfrac{10-2x}{2-2x-x^2}\right]:\dfrac{1}{x+3}$.

Operamos el primer numerador.

$$x-\frac{x}{x-2}$$

Sacamos el m.c.m. de los denominadores: $x-2$

$$\frac{x^2-2x}{x-2}-\frac{x}{x-2}=\frac{x*(x-3)}{x-2}$$

Operamos el primer denominador:

$$x+\frac{x}{x-2}$$

Sacamos el m.c.m. de los denominadores: $x-2$

$$\frac{x^2-2x}{x-2}+\frac{x}{x-2}=\frac{x\cdot(x-1)}{x-2}$$

Simplificamos entre el primer numerador y el primer denominador.

$$\frac{x\cdot(x-3)\cdot(x-2)}{(x-2)\cdot x\cdot(x-1)}=\frac{x-3}{x-1}$$

Factorizamos el numerador de la segunda fracción de partida:

$$10-2x=2*(5-x)$$

Encontramos el numerador común de todo el corchete corchete.

$\left[\dfrac{x-3}{x-1}-\dfrac{2\cdot(5-x)}{2-2x-x^2}\right]$ → m.c.m. de las dos fracciones → $(x-1)\cdot(-x^2-2x+2)$

$\left[\dfrac{(x-3)\cdot(-x^2-2x+2)}{(-x^2-2x+2)\cdot(x-1)}-\dfrac{(x-1)\cdot2\cdot(5-x)}{(-x^2-2x+2)\cdot(x-1)}\right]$ → operamos → $\dfrac{-x^3+3x^2-4x+4}{(-x^2-2x+2)*(x-1)}$

Realizamos la siguiente división:

$$\frac{-x^3+3x^2-4x+4}{(-x^2-2x+2)*(x-1)}:\frac{1}{x+3} \rightarrow \frac{-x^4+5x^2-8x+12}{(-x^2-2x+2)*(x-1)} \rightarrow \frac{-x^4+5x^2-8x+12}{-x^3-x^2+4x-2}$$

Este sería el resultado final ya que no se puede simplificar más.

8. Simplifica $\frac{3+a}{1+a}-\frac{1+a}{a-1}-\frac{2+a+a^2}{1-a^2}$ **.**

Sacamos el signo negativo como factor común del tercer denominador.

$$1-a^2=-(a^2-1) \rightarrow \frac{3+a}{1+a}-\frac{1+a}{a-1}+\frac{2+a+a^2}{a^2-1}$$

Usamos binomio de Newton (suma por diferencia igual a diferencia de cuadrados).

$$a^2-1=(a+1)(a-1) \rightarrow \frac{3+a}{a+1}-\frac{a+1}{a-1}+\frac{2+a+a^2}{(a+1)(a-1)}$$

Calculamos mínimo común múltiplo.

$$\frac{(3+a)(a-1)}{(a+1)(a-1)}-\frac{(a+1)(a+1)}{(a+1)(a-1)}+\frac{2+a+a^2}{(a+1)(a-1)} \rightarrow \frac{3a-3+a^2-a-a^2-1-2a+2+a+a^2}{(a+1)(a-1)}$$

$$\frac{-2+a+a^2}{(a+1)(a-1)}$$

Factorizamos el numerador en binomios a partir de sus raíces.

$$a^2+a-2=(a-1)(a+2)$$

Sustituimos en el numerador.

$$\frac{(a-1)(a+2)}{(a+1)(a-1)} \rightarrow \text{simplificar} \rightarrow \frac{a+2}{a+1}$$

9. Simplifica

$$\left(\frac{1+\frac{1}{a}}{a-1} \cdot \frac{\frac{1}{a}-a^3}{\frac{1}{a^3}+1} \right) : \frac{a^2+2a+1}{1+\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a}}$$

Factorizamos siempre que podamos, buscando dejar todo en una sola fracción donde poder simplificar.

$$\left(\frac{\frac{a+1}{a}}{a-1} \cdot \frac{\frac{1-a^4}{a}}{\frac{1+a^3}{a^3}} \right) : \frac{(a+1)^2}{\frac{a^2+1-a}{a^2}} \rightarrow \frac{\frac{(a+1)(1-a^4)}{a^2}}{\frac{(a-1)(1+a^3)}{a^3}} : \frac{(a+1)^2}{\frac{a^2-a+1}{a^2}} \rightarrow \frac{a(a+1)(1-a^4)}{(a-1)(1+a^3)} : \frac{a^2(a+1)^2}{a^2-a+1}$$

$$\frac{(1-a^4)}{(a-1)(1+a^3)} : \frac{a(a+1)}{a^2-a+1} \rightarrow \frac{(1-a^4)(a^2-a+1)}{a(a+1)(a-1)(1+a^3)} \rightarrow \frac{-(a^4-1)(a^2-a+1)}{a(a^2-1)(1+a^3)}$$

$$\frac{-(a^2+1)(a^2-1)(a^2-a+1)}{a(a^2-1)(1+a^3)} \rightarrow \frac{-(a^2+1)(a^2-a+1)}{a(1+a^3)} \rightarrow \frac{-(a^2+1)(a^2-a+1)}{a(a+1)(a^2-a+1)}$$

$$\frac{-(a^2+1)}{a(a+1)}$$