SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN Y REGLADAS:

A CLASE CON GEOGEBRA

Bernat Ancochea Millet (*Associacío Catalana de GeoGebra)*
José Manuel Arranz San José (*IES Álvaro de Mendaña. Ponferrada. León)*
José Muñoz Santonja (*IES Macarena. Sevilla)*

Una **superficie** es aquello que solo tiene longitud y anchura.
Euclides, Los Elementos, Libro I, definición 5ª.

1. Superficies dentro y fuera del aula.

Vivimos en un mundo tridimensional en donde constantemente estamos rodeados de referencias matemáticas. Uno de los objetivos de la didáctica, al menos en entornos no universitarios, ha sido siempre el llevar aspectos del entorno cotidiano al interior del aula para utilizarlos como recursos. No siempre es fácil ya que las matemáticas que existen en esa cotidianidad superan los niveles o las posibilidades que podemos desarrollar dentro del aula. Sin embargo, los avances tecnológicos están permitiendo que podamos trabajar en el aula, de forma sencilla, conocimientos que hasta el momento superaban nuestras expectativas.
En esta línea, queremos presentar las posibilidades que el programa GeoGebra nos da para construir muy fácilmente objetos tridimensionales que han sido generados por revolución o de una forma reglada a partir de segmentos lineales o curvos. Por un lado, la respuesta a la consabida pregunta de para qué sirven las matemáticas que vemos en la secundaria puede ser respondida fácilmente viendo que objetos cotidianos son generados o diseñados gracias a las matemáticas. Por otro, la herramienta permite que el alumnado pueda plantear un proyecto donde investigar variaciones creando objetos regulares que se escapan de lo habitual, lo cual les sirve de aliciente y de motivación.

2. Superficies de revolución

Una superficie de revolución es aquella que se genera mediante la rotación de una curva plana, o generatriz, alrededor de una recta directriz, llamada eje de rotación, *la cual se halla en el mismo plano que la curva (no es necesario en GeoGebra)*.

Ejemplos comunes de una superficie de revolución son:

Una superficie de revolución cilíndrica es generada por la rotación de una línea recta, paralela al eje de rotación, alrededor del mismo;

Una superficie de revolución cónica es generada por la rotación de una recta alrededor de un eje al cual interseca en un punto, llamado vértice o ápice,

Una superficie de revolución esférica está generada por la rotación de una semicircunferencia alrededor de su diámetro;

Una superficie de revolución toroidal está generada por la rotación de una circunferencia alrededor de un eje que no la interseca en ningún punto

La utilización de superficies de revolución es esencial en diversos campos de la física y la ingeniería, así como en el diseño. La alfarería, el torneado industrial e incluso el diseño en multitud de campos, moldean y modelan volúmenes con variadas superficies de revolución de gran utilidad y uso cotidiano.

Imagen1. Superficies de revolución.

2.1 Superficies de revolución de objetos geométricos.

Las versiones actuales de GeoGebra permiten construir superficies de revolución de la mayoría de los objetos creados utilizando los botones de la barra de herramientas, tanto los de la vista gráfica 2D y 3D. La construcción de superficies de revolución está al alcance de todos los alumnos sin limitación de edad.

2.1.1 Superficies de revolución de un segmento

Actividad 1. Herramienta Superficie de revolución.

Construye los puntos A(1,1), B(3,2) y el segmento AB en la vista gráfica 2, para ello selecciona la herramienta segmento, y haz clic en los dos puntos del plano. También puedes introducir los puntos en la barra de entrada y el comando **Segmento(A, B)**. Automáticamente se muestra el segmento creado en la vista gráfica 3D.

Haz clic en la vista gráfica 3D, para que se muestre su barra de herramientas. Selecciona la herramienta "**Superficie de Revolución**" y selecciona el segmento construido, de forma automática se construye la superficie de revolución engendrada por el segmento al girar una vuelta completa alrededor del eje x.

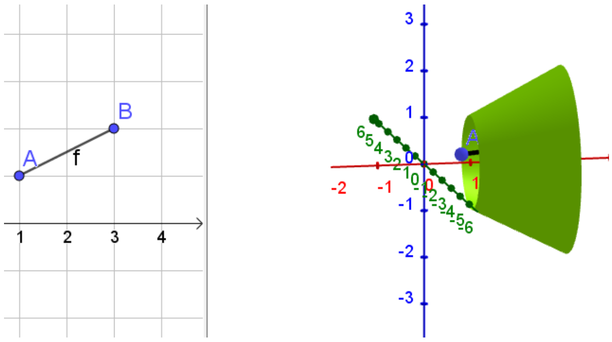

Imagen 2. Superficie de revolución de un segmento alrededor del eje x

Mueve ahora utilizando el ratón los puntos A y B, de forma que se modifique la superficie construida. Mueve los puntos para que la superficie sea un cono, un cilindro, …

Se obtiene el mismo resultado si en vez de utilizar la herramienta Superficie de revolución, se escribe en la barra de entrada la expresión**: Superficie(f, 360º),** o bien **Superficie(f, 2 pi)**, donde f es el segmento. En este caso podemos indicar el ángulo en grados o en radianes. **Superficie(f, 45º)** es equivalente a **Superficie(f, pi/4)**.

Actividad 2. Cambio de eje en la superficie de revolución.

Si se desea construir la superficie de revolución que genera el segmento alrededor de cualquier otro eje, es necesario especificarlo. Para hallar la superficie alrededor del eje Y basta escribir **Superficie(f, 360º,EjeY)**.

Construye un tronco de cono como el que muestra la imagen como superficie de revolución de un segmento alrededor del eje y.

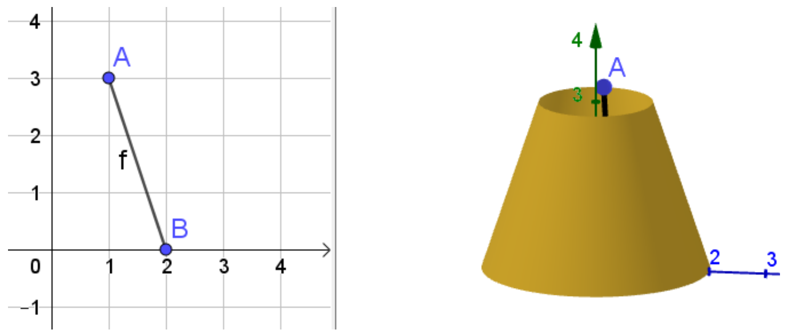

Imagen 3. Tronco de cono como superficie de revolución de un segmento.

Si se desea mostrar el eje y en posición vertical, basta acceder a las opciones de la vista gráfica 3D y marcas la casilla “**Eje Y vertical**”.

También podemos hacer Superficie(f, 360º,EjeZ) que en este caso creará una corona circular en el plano z=0. Es la forma más sencilla de colorear una corona circular con GeoGebra.

Actividad 3. Hiperboloide de una hoja

Crea un deslizador r con valores de 0 a 3 y otro h con valores de 1 a 4. Teniendo seleccionada la vista 3D, introduce las siguientes instrucciones:

- Circunferencia((0,0,0), r)
- Circunferencia ((0,0,h), r)

Construye un punto A y un punto B sobre las dos circunferencias y el segmento que los une. La superficie de revolución **Superficie(f,2pi,EjeZ)**, donde f es el segmento que une los puntos en las circunferencias, será un cilindro, cono o hiperboloide de una hoja en función de la posición relativa de los puntos sobre las circunferencias.

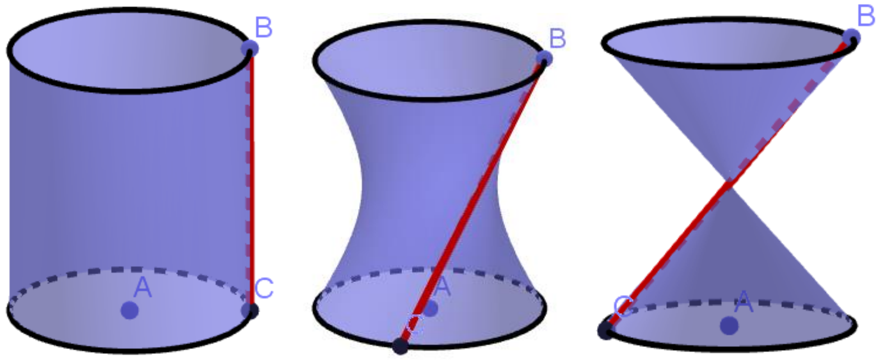

Imagen 4. Cilindro, hiperboloide de una hoja y cono como superficies de revolución de un segmento.

Puedes utilizar los deslizadores para comprobar cómo afectan al radio y la altura de esas figuras.

2.1.2 Superficies de revolución de polígonos y circunferencias.

Actividad 4. Superficie de revolución de un polígono.

Construye un polígono en la vista gráfica 2D, crea las superficies de revolución que se generan al rotar sobre el eje x y sobre el eje y (***Superficie(polígono1, 360º, EjeY)***). Puedes modificar los puntos del polígono y ver cómo afectan a la superficie creada.

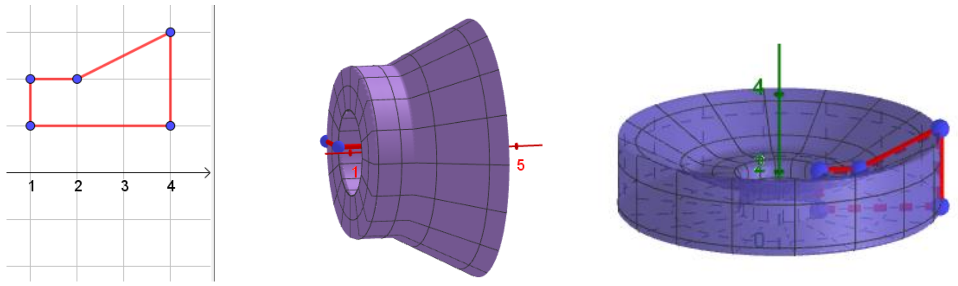

Imagen 5. Superficies de revolución de un polígono.

Actividad 5. Toro como superficie de revolución.

Construye un punto sobre el eje x, por ejemplo A=(4,0,0). Introduce la expresión **Circunferencia(A, 1, EjeY)** que construye la circunferencia de radio 1 centrada en A en la dirección del eje y. Basta ahora escribir **Superficie(c, 2 pi, Eje Z).**

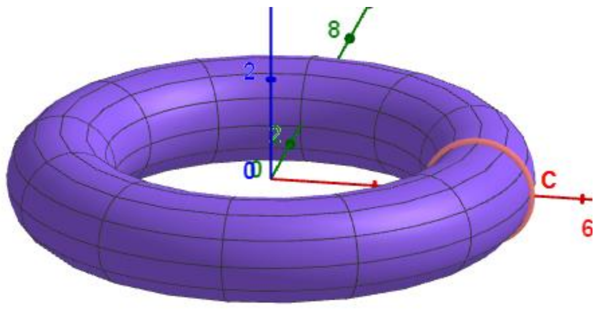

Imagen 6. Toro como superficie de revolución de una circunferencia.

2.1.3 Superficies de revolución de líneas poligonales. Comando Spline.

Actividad 6. Superficie obtenida de una poligonal.

Introduce en la barra de entrada los puntos: A=(1, 0), B=(2, 1), C=(2, 3), D=(1, 3), E=(1, 5) y F=(2, 6) y el comando **Poligonal(A, B, C, D, E, F)**.

La instrucción **Superficie(f, 2 pi, EjeY)**, donde f es la poligonal, construye la superficie de revolución que se muestra en la imagen de la izquierda. Se ha situado el eje y en posición vertical.

El comando Spline construye una curva polinómica (grado mayor o igual que tres) que pasa por los puntos que se indiquen. La estructura del comando es : **Spline(<Lista de puntos>, <Grado ≥ 3>),** como se muestra en la imagen de la derecha.

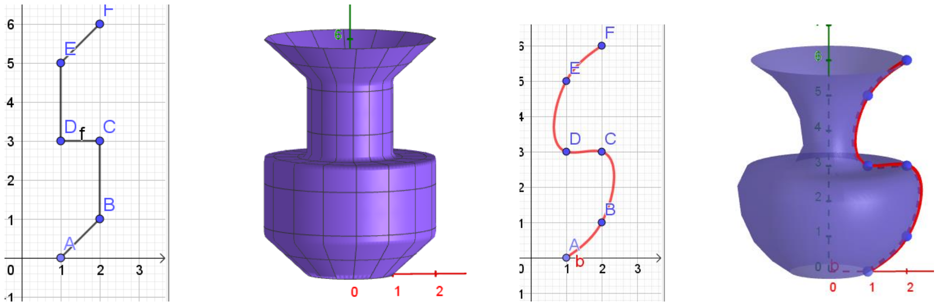

Imagen 7. Superficie de revolución de una línea poligonal y su curva Spline.

Puedes crear un deslizador g con valores desde 3 hasta 7. Si ahora creas la superficie **Superficie(a, 2 pi, EjeY)**, siendo **a** la curva spline, puedes modificar el deslizador para ver cómo afecta a la curvatura de la superficie final. Si llegas a tomar el valor 7 verás que desaparece la superficie pues el grado debe ser mayor o igual que 3 y menor que 7.

2.1.4 Superficies artesanales. Figura a mano alzada

Seleccionando la herramienta "**Figura a mano alzada**" podemos dibujar con el ratón una línea, que GeoGebra denomina **boceto(x)** y a partir de ella construir la superficie de revolución correspondiente.

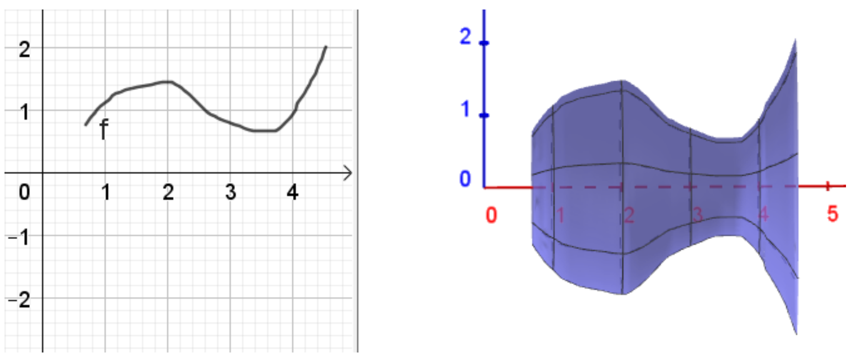

Imagen 8. Superficie de revolución de una línea a mano alzada.

Para que GeoGebra identifique la línea a mano alzada, ésta ha de ser una función, a cada valor de x, un único valor de y.

Las versiones actuales de GeoGebra permiten también construir polígonos sencillos: triángulos, cuadrados, rectángulos, así como circunferencias a mano alzada. Basta que la línea trazada con el ratón u otro dispositivo sea aproximadamente el objeto que se desea.

2.2 Superficie de revolución de una función y=f(x)

Utilizando la instrucción **Superficie(<Función>,<Ángulo de rotación(en sentido antihorario)>)** si la rotación es alrededor del eje x o bien **Superficie(<Curva>, <Ángulo de rotación (en sentido antihorario)>, <Lado (semi/recta o segmento)>)** para cualquier eje, GeoGebra construye y muestra la superficie que se obtiene. La técnica es idéntica a la mostrada en el apartado anterior sustituyendo ahora un objeto geométrico por una función y=f(x).

2.2.1 Funciones en un intervalo

Para definir una función en un intervalo se utiliza la instrucción **Función(<Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>)**

Actividad 7. Superficie de revolución de una función alrededor del eje X o Y.

Construye la superficie generada por y=x^2 definida en [0,2] al rotar al alrededor del eje x y del eje y.

Mediante la expresión: Función(x^2,0,2) o si se prefiere Si(0<x<2,x^2) se construye la función, sea f dicha función.

Superficie(f,360º) construye la superficie alrededor de eje x. Superficie(f, 360º,EjeY) la superficie al rotar sobre el eje y. El ángulo puede expresarse en grados o bien en radianes.

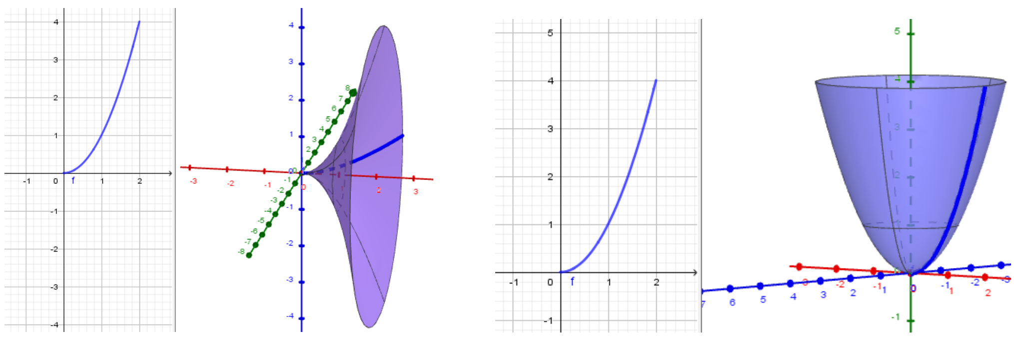

Imagen 9. Superficie de revolución de función y=x^2 sobre eje x y eje y.

En la imagen de la derecha se ha situado el eje y en posición vertical como se indicó en anteriormente.

¿Qué obtendrías si hallas la superficie alrededor del eje Z?

Actividad 8. Superficie de revolución de una función alrededor del eje Z.

Como habrás observado en la última propuesta, si generamos una superficie de una función al girar alrededor del eje Z obtenemos una superficie plana. Para conseguir la superficie alrededor del eje Z necesitamos una pequeña variación.

Para generar superficies de revolución sobre el Eje Z a partir de la función y=f(x) basta escribir: **Superficie(u cos(v), u sen(v), f(u), u, m, M, v, 0, α)** donde m y M son los extremos del intervalo de definición de f(x) y α el ángulo de giro, que puede ser menor de 360º si así se desea.

Construye la superficie de revolución generada por la la función y=*e* ^x al girar sobre eje z, con x definido en el intervalo [-2.5,1.8].

Escribe en barra de entrada: **Superficie(u cos(v),u sen(v),*e* ^u,u,-2.5,1.8,v,0, 2 pi)**

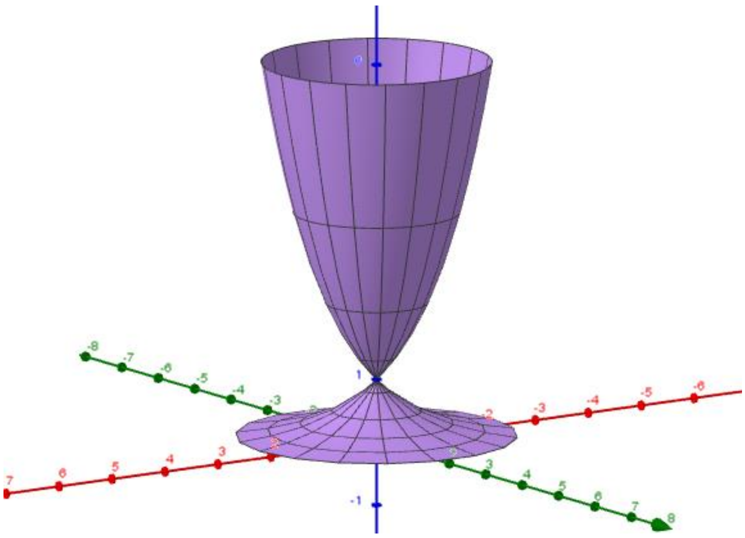

Imagen 10. Superficie de revolución de la función y=*e* ^x alrededor de eje z.

Aplica este método para construir la superficie de la actividad 7, pero ahora alrededor del eje Z.

Actividad 9. Hiperboloide como superficie de revolución de una función.

De igual forma que se han construido superficies de revolución al girar sobre uno de los ejes de coordenadas x, y, z, puede de forma idéntica construirse superficies al girar sobre un eje cualquiera.

Construye la hipérbola $y= -1/x$ en el intervalo [-4,-1/4] y la bisectriz del primer cuadrante, recta que pasa por A(0,0) y B(1,1), sean f y g respectivamente.

La instrucción **Superficie(f,2 pi, g)** construye un hiperboloide de una hoja.

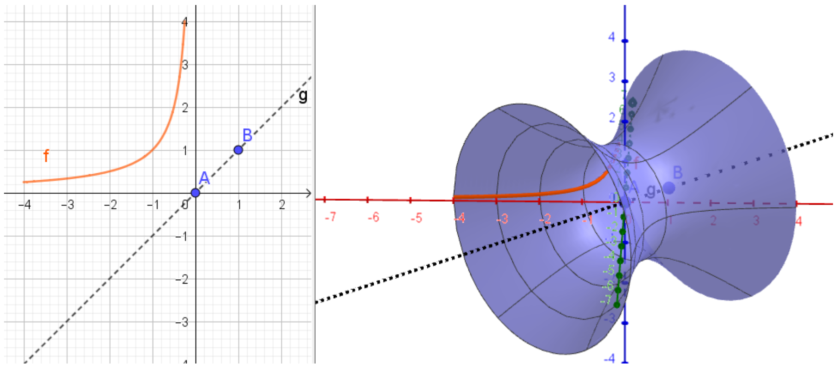

Imagen 11. Superficie de revolución de la función $y=1/x$ alrededor de bisectriz primer cuadrante.

Mueve el punto B en la vista gráfica 2D y observa cómo afecta a la superficie creada. ¿Qué ocurre si la recta coincide con una de las asíntotas de la función? ¿Y si la recta corta a la función?

Actividad 9b. Hiperboloide como superficie de revolución de una función.

Modifica la construcción anterior de forma que B=(1,1,1) ¿Se obtiene el mismo paraboloide en distinta posición, o es un paraboloide diferente?

2.2.2 Funciones definidas a trozos

La utilización de funciones definidas a trozos amplía las posibilidades de construcción de superficies. Consideramos es una excelente actividad para alumnos de tercer y cuarto curso de educación secundaria. Las posibilidades son aún mayores si se definen las funciones con ayuda de deslizadores.

Actividad 10. Superficie de una función a trozos.

Representa la función a trozos: Si(0 < x < 1, x^2, 1 < x < 2, 1, 2 < x < 4, -x + 3), de forma idéntica a como se ha hecho en apartados anteriores, la superficie que se origina al girar sobre el eje x es: Superficie(f, 2 pi, EjeX)

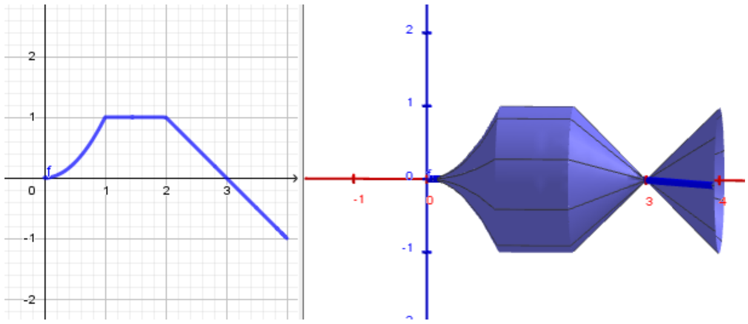

Imagen 12. Superficie de revolución de una función definida a trozos.

2.3 Superficies de revolución de curvas paramétricas.

El procedimiento de construcción de superficies de curvas expresadas en forma paramétrica, es idéntico a lo ya visto en los apartados anteriores.

Actividad 11. Superficies de revolución de Banda de Moebius.

Podemos construir una Banda de Moebius utilizando su expresión paramétrica. La orden a introducir sería la siguiente: **Superficie(r(1+v/2 cos(u/2)) cos(u),r(1+v/2 cos(u/2)) sen(u),b v/2 sen(u/2),u,0, 2pi, v,-c,c)**

En esa expresión aparecen tres parámetros, r, que sería el radio de la banda, c, que nos da la anchura de la banda que sería 2c y b que es la altura. Si b tomase el valor 0 obtendríamos una banda plana. Lo mejor es crear tres deslizadores y comprobar el efecto sobre la superficie.

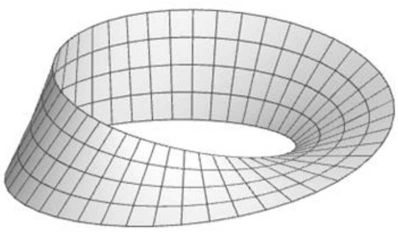

Imagen 13. Banda de Moebius.

Actividad 12. Superficies de revolución de lemniscata de Bernoulli

Representamos en primer lugar la Lemniscata, cuya expresión en coordenadas paramétricas es: **Curva(r sen(t) / (1 + cos²(t)), r sen(t) cos(t) / (1 + cos²(t)), t, 0, 2π)** donde r es un parámetro que da la amplitud de la hoja definido mediante un deslizador.

La superficie de revolución al girar la curva sobre el Eje X se construye escribiendo en la barra de entrada **Superficie(a, 2π)** y la superficie de revolución al girar sobre el Eje Y es **Superficie(a, 2π, EjeY)**.

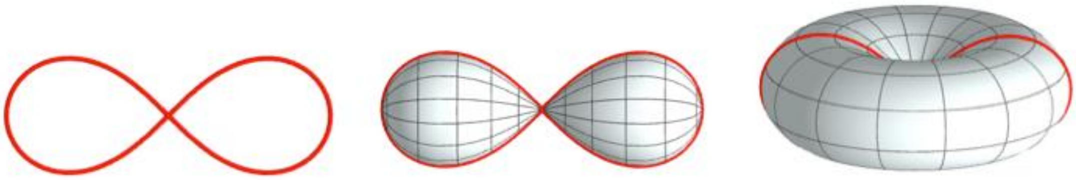

Imagen 14. Lemniscata de Bernuilli y superficies al girar sobre eje x e y respectivamente.

3. Superficies regladas

Una superficie reglada, en geometría, es la generada por una recta, denominada generatriz, al desplazarse sobre una curva o varias, denominadas directrices. En función de las características y condiciones particulares de estos elementos, recibe diversos nombres.

Imagen 15. Superficie reglada. Imagen de Roberto Uderio en [Wikimedia Commons](#).

No existe una instrucción específica en GeoGebra para construir superficies regladas, basta con aplicar la definición. Para poder construir superficies regladas, las dos curvas han de estar definidas en forma paramétrica, con una excepción: se admiten segmentos construidos en forma geométrica en la versión actual de GeoGebra.

3.1 Parametrizar un segmento

Es corriente que para hallar superficies regladas tengamos que parametrizar los segmentos o curvas que se van a utilizar en la construcción. Hasta hace poco, era necesario también con los segmentos pues en caso contrario no funcionaba. Aunque ahora ya se puede, para homogeneizar todo el proceso vamos a ver cómo se puede parametrizar un segmento, y lo mismo tendremos que hacer con otras curvas.

La expresión **Curva(A(1-t)+B t,t,0,1)** construye el segmento AB.

Es fácil ver que para t=0 se obtiene el punto A, para t=1 se obtiene B y para valores de t entre 0 y 1 los puntos intermedios entre A y B. Basta construir un deslizador u entre 0 y 1 y crear el punto D = A(1-u) + B u. Al mover u se observa cómo se obtienen todos los puntos del segmento.

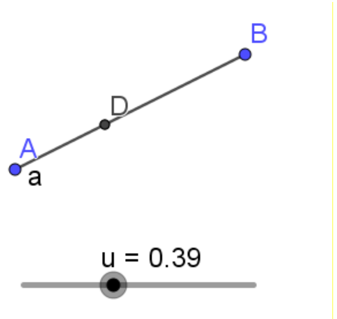

Imagen 16. Segmento en forma paramétrica.

3.2 Superficie reglada entre dos segmentos. Paraboloide hiperbólico.

Como hemos dicho, ya es posible hacerlo directamente con segmentos, por ello en la siguiente actividad supondremos que f y g pueden haberse obtenido de la forma que se desee.

Si dos segmentos están en el mismo plano, la superficie reglada construida entre ellos es el cuadrilátero que tiene por lados opuestos los segmentos dados. Si los segmentos no son coplanarios, la superficie reglada entre ellos es una porción de un paraboloide hiperbólico, también conocido como “silla de montar”.

Actividad 13. Paraboloide hiperbólico entre dos segmentos en el espacio.

Construye dos segmentos AB y CD sobre el plano base en la vista 3D, sean f y g, mueve con el ratón al menos dos de ellos verticalmente de forma que los cuatro puntos no estén en el mismo plano.

Escribe en barra de entrada: **Superficie(f(t) k + g(t) (1 - k), t, 0, 1, k, 0, 1)**

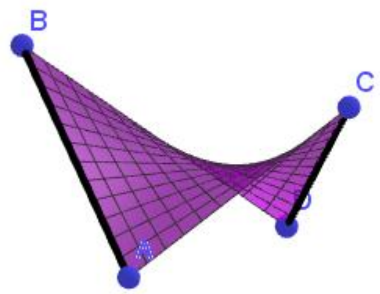

Imagen 17. Paraboloide hiperbólico entre dos segmentos.

Actividad 14. Superficie reglada en tetraedro

Construye un tetraedro y la superficie reglada entre dos aristas opuestas.

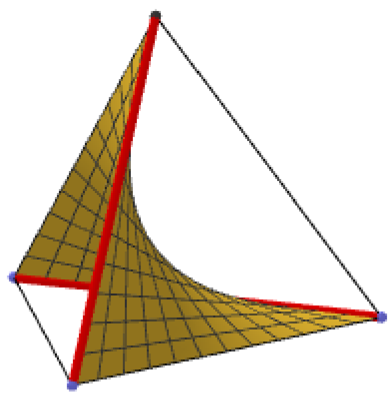

Imagen 18. Paraboloide hiperbólico construido entre aristas opuestas de un tetraedro.

El paraboloide hiperbólico construido divide al tetraedro en dos partes de igual área y volumen.

3.3 Superficies regladas entre dos curvas

Repitiendo la estructura de la instrucción del apartado anterior podemos construir superficies regladas entre dos curvas cualesquiera, con la única condición de que ambas estén expresadas en forma paramétrica.

3.3.1 Superficies regladas entre dos circunferencias

Actividad 15. Cilindro e hiperboloide de una hoja como superficies regladas.

Una circunferencia de radio r sobre el plano XY, centrada en el origen se parametriza en la forma **Curva(r cos(t), r sen(t),0, t, 0, 2π)**. Si la circunferencia está en el plano z=h su expresión es **Curva(r cos(t), r sen(t), h, t, 0, 2π)**, siendo r el valor que queramos darle al radio.

La superficie reglada entre ambas, cilindro, se construye mediante la expresión: **Superficie(a(t) k +b(t)(1-k), k,0,1, t,0,2π)** siendo a y b las circunferencias.

Si rotamos la circunferencia a un ángulo α alrededor del Eje Z, obteniendo **a' = Rota(a, α, EjeZ)** al sustituir a' por a en la instrucción de superficie anterior, la superficie que se obtiene es un hiperboloide de una hoja, construido como superficie reglada. Si el ángulo de rotación es 180º se obtiene un doble cono. Si defines el ángulo como deslizador puedes comprobar todas las posibilidades.

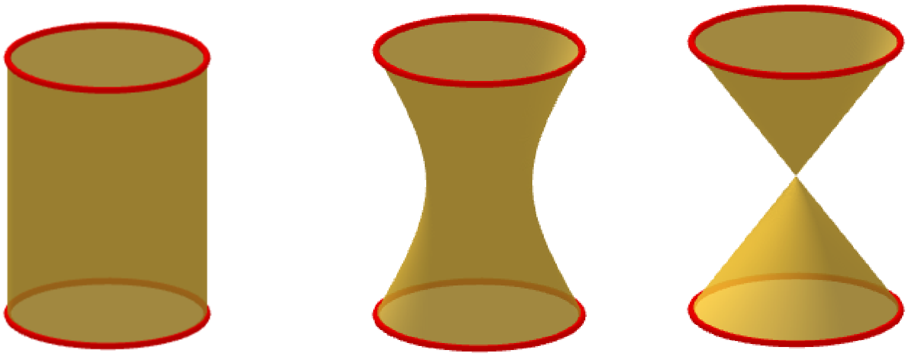

Imagen 19. Cilindro, hiperboloide y cono construidos como superficies regladas entre dos circunferencias.

Si las circunferencias tienen distinto radio, obtenemos un tronco de cono en el primer caso, un hiperboloide asimétrico en el segundo y dos conos diferentes en el tercer caso al realizar un giro de una de las circunferencias.

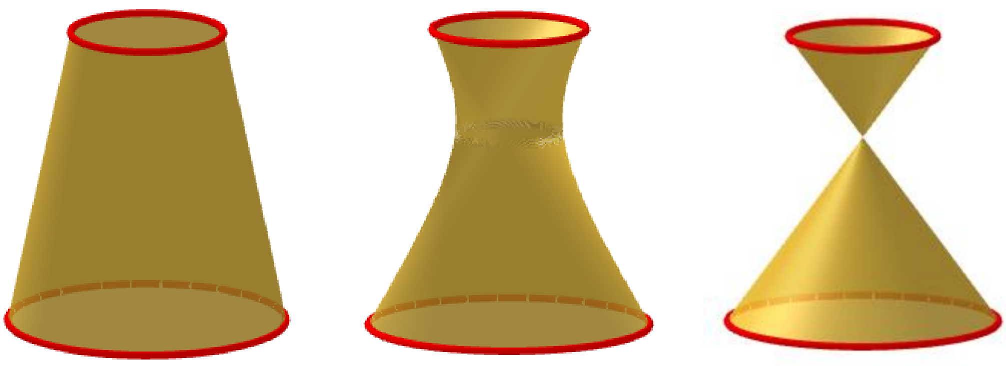

Imagen 20. Tronco de cono, hiperboloide asimétrico y doble cono entre circunferencias de distinto radio.

Resulta sencillo seguir generalizando esta construcción, basta trasladar horizontalmente una de las circunferencias o ambas para obtener cilindro, hiperboloide y conos oblicuos.

Si sustituimos las circunferencias por elipses, obtendríamos un cilindro elíptico en el primer caso, hiperboloide elíptico, y cono elíptico en el tercero.

3.3.2 Superficies regladas entre arcos de circunferencia.

Pueden realizarse construcción es similares entre arcos de circunferencias, pudiendo éstos tener un punto común. Las cúpulas que coronan algunas iglesias y otros monumentos pueden modelarse por esta técnica.

Actividad 16. Superficie reglada entre dos arcos perpendiculares

Vamos a construir la superficie reglada entre dos arcos de circunferencia perpendiculares de igual radio de amplitud 180º. Basta seguir las indicaciones.

El primer arco sobre el eje x tiene por expresión **Curva(a+a cos(t),0,a sen(t), t, 0, π)**, el arco sobre el eje y se puede expresar como **Curva(0, a+a cos(t), a sen(t), t, 0, π)**, y por tanto la superficie entre ambos **Superficie(c(t) (1 - k) + d(t) k, k, 0, 1, t, 0, π)** siendo c y d los arcos construidos previamente.

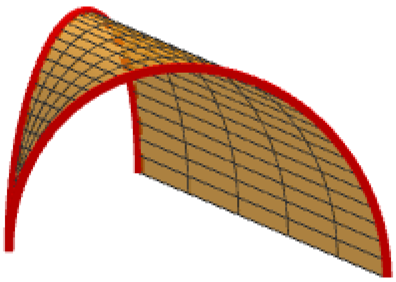

Imagen 21. Superficie reglada entre dos arcos de circunferencia perpendiculares.

No siempre es fácil escribir la expresión paramétrica de una de estas curvas en cualquier posición. Si escribimos su expresión de una circunferencia en una posición determinada y posteriormente hacemos giros o traslaciones, GeoGebra se encarga de mostrar su nueva ecuación parametrizada.

Si los arcos tienen distinta amplitud angular, es necesario trasformar su expresión parametrizada de forma que tenga la misma, lo más eficaz es expresarlos ambos en el intervalo [0,1], el arco **Curva(a cos(t), a sen(t),0, t, 0, π)** puede escribirse como **Curva(a cos(pi t), a sen(pi t),0, t, 0, 1)** con lo que se resuelve el problema.

3.3.3 Superficie reglada entre dos curvas definidas por Splines

La utilización de curvas definidas mediante Spline allana las dificultades expuestas al parametrizar curvas en el espacio, especialmente en el caso de arcos.

Actividad 17. Construcción de una cúpula mediante superficies regladas.

Introduce en la barra de entrada las siguientes instrucciones:

- Construye los puntos A=(0,0,4), B=(1,0,2.5), C=(2.5,0,2) y D=(3,0,0).
- Crea la curva spline **a = Spline({A,B,C,D},3)**.
- Rota la spline **a' = Rota(a, 60º,EjeZ)**.
- Crea la superficie **b = Superficie(k a(t) + (1 - k) a'(t), k, 0, 1, t, 0, 1)**.
- **Secuencia(Rota(a', t 60°, EjeZ), t, 1, 4)**.
- **Secuencia(Rota(b, t 60°, EjeZ), t, 1, 5)**.

Moviendo con el ratón verticalmente los puntos iniciales y modificando el ángulo de rotación, si se desea, la construcción modeliza la mayoría de las cúpulas que presiden muchos edificios.

Finalmente, modifica aspectos visuales de curvas y superficies que has construido.

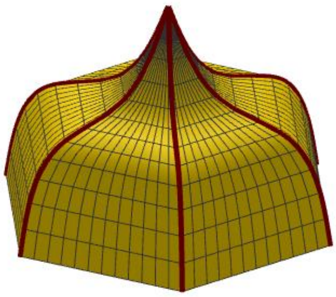

Imagen 22. Cúpula construida mediante curvas Spline y superficies regladas.

3.4 Superficies regladas entre un punto y una curva

Lo expuesto para dos curvas es válido para la construcción de superficies entre un punto y una curva, basta sustituir una de las curvas por el punto.

Dados un punto A y una curva parametrizada a(t), la superficie reglada se construye como: **Superficie(A k +a(t)(1-k),k,0,1,t,0,2 pi).**

De esta forma, si construimos la superficie reglada entre un punto y una circunferencia se obtiene un cono, recto o inclinado en función de su posición relativa. Sería un cono elíptico si utilizamos una elipse y muchas otras superficies en función de la curva empleada: rosáceas, nefroides, lemniscatas, …

Actividad 18. Reglada entre punto y curva

Crea el punto A=(0,0,3) y la curva **a = Curva(r / n (n cos(t) + cos(n t)), r / n (n sen(t) + sen(n t)), t, 0, 2π)**, que nos da la epicicloide de radio r y con n arcos. La superficie se obtiene con: **Superficie(A k+a(t)(1-k),k,0,1,t,0, 2 Pi)**.

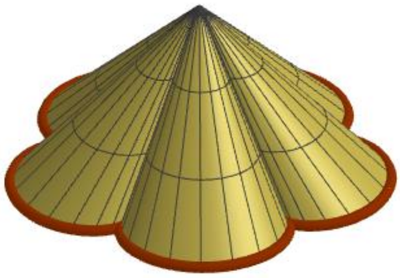

Imagen 23. Superficie reglada entre curva y punto.

Moviendo el punto A horizontalmente se obtiene la superficie inclinada.

4. Superficies de traslación

Se denominan superficies de traslación o superficies traslacionales a las que se obtienen cuando una curva generatriz se desplaza siguiendo la trayectoria de otra curva directriz. Si la curva directriz es una recta (o segmento), se obtienen las superficies regladas. Las superficies de traslación son por tanto una generalización de las superficies regladas.

Las posibilidades de generación de superficies mediante esta técnica son infinitas. Sea a(u) la curva generatriz, b(v) la curva directriz, si A es el punto de intersección de ambas, la superficie de traslación se obtiene mediante:

Superficie(a(u)+b(v)-A, u, u_m, u_M, v,v_m, v_M). donde los subíndices m y M aluden a valor mínimo y máximo de los parámetros.

En principio no hay restricciones en el tipo de curvas a y b, con la única condición que ambas curvas estén expresadas en forma paramétrica.

Veamos un ejemplo de estas interesantes superficies. Una semicircunferencia (roja) se traslada siguiendo la trayectoria de otra semicircunferencia perpendicular (verde) como muestra la imagen de la izquierda.

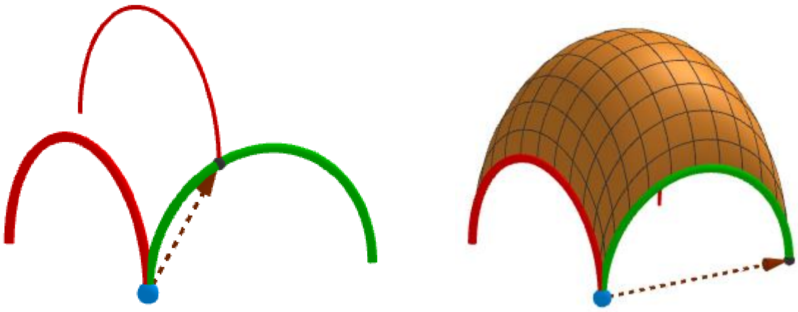

Imagen 24. Superficie de traslación de una semicircunferencia sobre otra semicircunferencia.

Actividad 19. Paraboloide hiperbólico.

Construye las dos parábolas siguientes expresadas en forma paramétrica:

La curva generatriz será: **a = Curva(-4, t, -t^2+4, t, -2, 2)**. La expresión de la curva directriz: **b = Curva(t, 0, t^2/4, t, -4, 4)**. El punto de intersección de estas curvas es A(-4,0,4).

La superficie que se obtiene al trasladarse la primera parábola siguiendo la trayectoria de la segunda es: **Superficie(a(u)+b(v)-A, u, -2,2, v, -4,4)**.

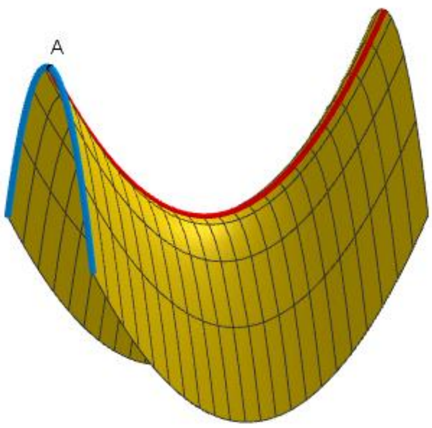

Imagen 25. Paraboloide hiperbólico como superficie de traslación.

4. En busca de las superficies en nuestro entorno.

Una vez que hemos visto la facilidad con que se pueden construir las superficies de revolución y las regladas, el paso siguiente es salir del aula y buscar construcciones a nuestro alrededor que se engloben dentro de esos parámetros. Y por supuesto, plantearnos como recrearlas utilizando GeoGebra.

Para toda persona que haya llegado hasta este punto con tiempo proponemos una última actividad.

La siguiente imagen vemos una puerta con un rosetón de la Iglesia de Petra, en Mallorca.

Imagen 26. Iglesia de Petra en Mallorca.

Actividad 20: Recreación de la ubicación de un rosetón.

Lo que te proponemos es hacer una construcción donde pueda verse la ventana que incluye el rosetón. Se podría obtener una imagen como la siguiente. En la parte izquierda te aparece una recreación de cómo construir la silueta.

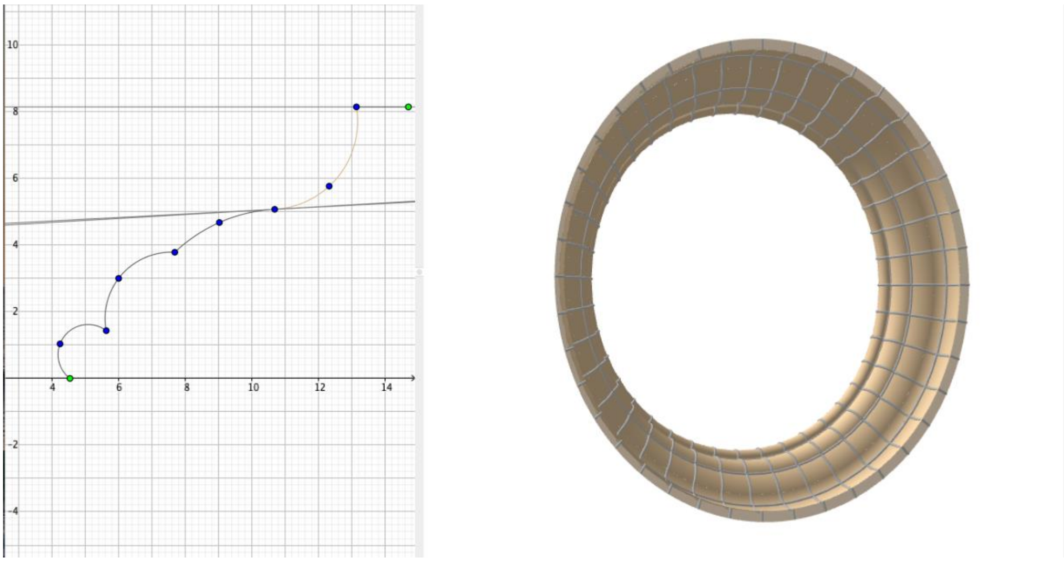

Imagen 27. Recreación de la ventana del rosetón.