Extremwertprobleme und Funktionsgraphen (Dreiecke)

H. Wuschke

Aufgabe A1.2.3 Abitur 2008 mit CAS

Die Funktion f ist gegeben durch die Gleichung

$$f(x) = -\frac{1}{60}x^3 - \frac{1}{20}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 \qquad \text{mit } x \in \mathbb{R}$$

Ihr Graph ist G.

Ein Dreieck OAB entsteht durch den Koordinatenursprung O, den Schnittpunkt A des Graphen mit dem positiven Teil der x-Achse und den Punkt B.
Der Punkt B liegt im ersten Quadranten auf G.

Berechnen Sie den maximalen Flächeninhalt des Dreiecks OAB.

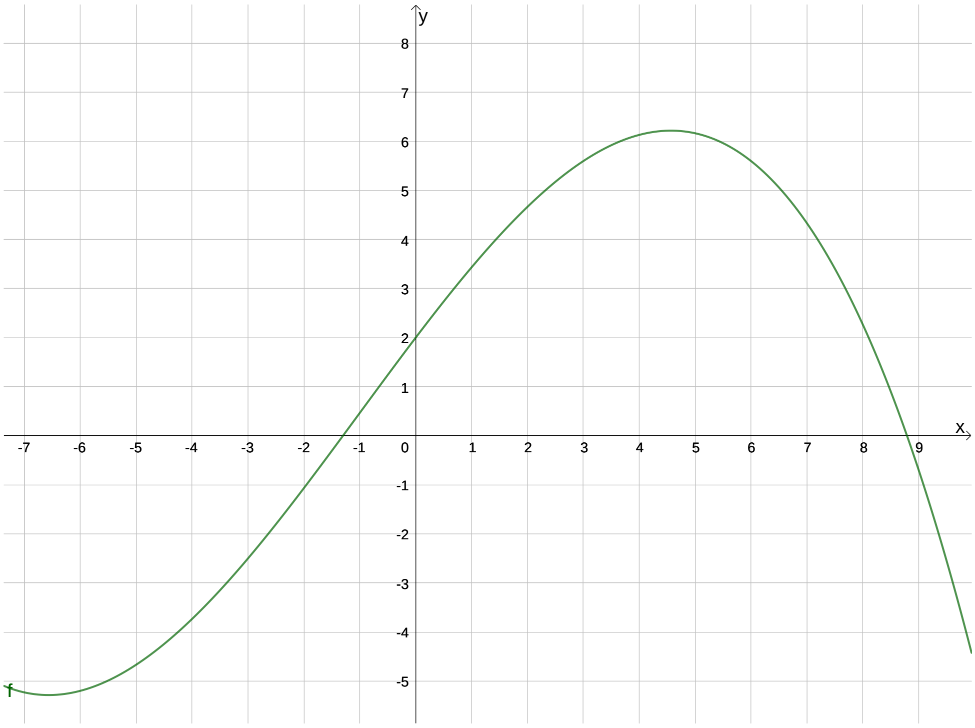

Abbildung 1: Darstellung der Funktion

Für den Punkt A sind die Nullstellen von $f(x)$ zu bestimmen

$0 = f(x) \quad \rightarrow \quad x_1 \approx -10,49, x_2 \approx -1,30$ und $x_3 \approx 8,79$. Damit ist nur $x \approx 8,79$ eine positive Nullstelle und somit ist $A(8,79|0)$.

Da der Punkt B zwischen dem Koordinatenursprung O und A liegt, gilt:

$$B(u|f(u)), \quad 0 < u < 8,79$$

Für den Flächeninhalt des $\triangle OAB$ gilt: $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 8,79 \cdot f(u)$

Somit ist also $A(u) = \frac{1}{2} \cdot 8,79 \cdot \left(-\frac{1}{60}u^3 - \frac{1}{20}u^2 + \frac{3}{2}u + 2\right)$ und
$A'(u) = \frac{1}{2} \cdot 8,79 \cdot \left(-\frac{1}{20}u^2 - \frac{1}{10}u + \frac{3}{2}\right)$ und $A''(u) = \frac{1}{2} \cdot 8,79 \cdot \left(-\frac{1}{10}u - \frac{1}{10}\right)$

Nun wird das Maximum auf die übliche Weise bestimmt:
$0 = A'(u) \quad \rightarrow \quad u_1 \approx -6,57$ (entfällt, da < 0) und $u_2 \approx 4,67$

$A''(4,67) \approx -2,45 < 0 \rightarrow$ bei $u_2 \approx 4,67$ befindet sich ein lokales Maximum.

$A(4,67) \approx 6,22 \quad \rightarrow \quad H(4,67|6,22)$

Der maximale Flächeninhalt beträgt 6,22 FE.