Problemas – Tema 9

Problemas resueltos - 12 - haz de planos

1. Sea r la recta definida por $r:\begin{Bmatrix} x+2y-z=3 \\ 2x-y+z=1 \end{Bmatrix}$ **.**

a) Determina la ecuación general del plano que contiene a r y pasa por el origen de coordenadas.

b) Halla las ecuaciones paramétricas del plano que corta perpendicular a r en el punto $(1,1,0)$.

a) Podemos resolver este ejercicio de dos formas: como haz de planos o bien buscando dos vectores independientes y un punto del plano. Vamos a resolverlo de ambas formas.

Como haz de planos necesitamos escribir la ecuación del haz a partir de dos planos que pasen por la recta. De la ecuación general del plano podemos escribir:

$$a(x+2y-z-3)+b(2x-y+z-1)=0$$

De los infinitos planos que pasan por la recta nos quedamos con el que pase por el origen de coordenadas. Es decir, sustituimos $x=y=z=0 \rightarrow a(0+0-0-3)+b(0-0+0-1)=0 \rightarrow -3a-b=0 \rightarrow b=-3a$

Llevamos este resultado al haz de planos.

$$a(x+2y-z-3)+(-3a)(2x-y+z-1)=0 \rightarrow a(x+2y-z-3-6x+3y-3z+3)=0$$

El plano solución resulta → $\Pi:-5x+5y-4z=0$

Una segunda forma de resolverlo consiste en buscar dos vectores linealmente independientes paralelos al plano y un punto.

Según el enunciado, el punto puede ser $P(0,0,0)$ ya que el plano pasa por el origen de coordenadas.

Necesitamos los dos vectores independientes y paralelos al plano. Uno de esos vectores será el vector director de la recta, ya que el plano contiene a la recta. Si pasamos la recta a paramétrica obtenemos el vector director de la recta.

$$r:\begin{Bmatrix} x+2y-z=3 \\ 2x-y+z=1 \end{Bmatrix} \rightarrow z=\lambda \rightarrow r:\begin{Bmatrix} x+2y=3+\lambda \\ 2x-y=1-\lambda \end{Bmatrix} \rightarrow r:\begin{Bmatrix} x+2y=3+\lambda \\ 4x-2y=2-2\lambda \end{Bmatrix}$$

Sumamos ambas ecuaciones → $5x=5-\lambda \rightarrow x=1-\frac{1}{5}\lambda \rightarrow 2(1-\frac{1}{5}\lambda)-1+\lambda=y$

$y=1+\frac{3}{5}\lambda$ → La recta en paramétricas resulta $r:\begin{Bmatrix} x=1-\frac{1}{5}\lambda \\ y=1+\frac{3}{5}\lambda \\ z=\lambda \end{Bmatrix}$ → $\vec{u}_r=\left(\frac{-1}{5},\frac{3}{5},1\right)$

Para no trabajar con fracciones podemos tomar como vector director → $\vec{u}_r=(-1,3,5)$

Un segundo vector del plano podemos obtenerlo a partir del $P(0,0,0)$ y de un punto de la recta. Por ejemplo el $A(1,1,0)$ → $\vec{PA}=(1,1,0)$

Los dos vectores $\vec{u}_r=(-1,3,5)$ y $\vec{PA}=(1,1,0)$ son independientes, al no ser sus componentes proporcionales, ya que $\frac{-1}{1}\neq\frac{3}{1}\neq\frac{5}{0}$.

Con dos vectores independientes y paralelos al plano y el punto $P(0,0,0)$ perteneciente al plano, podemos obtener la determinación lineal del plano.

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & x \\ 3 & 1 & y \\ 5 & 0 & z \end{vmatrix}=0 \rightarrow -z+5y+0-(5x+0+3z)=0 \rightarrow \Pi:-5x+5y-4z=0$$

Resultado que coincide con el obtenido anteriormente con el método del haz de planos.

b) Un plano perpendicular a la recta $r:\begin{Bmatrix} x+2y-z=3 \\ 2x-y+z=1 \end{Bmatrix}$ tendrá como vector normal el vector director de la recta. En el apartado anterior obtuvimos $\vec{u}_r=(-1,3,5)$ como vector director.

Por lo tanto, la ecuación general del plano será $-x+3y+5z+D=0$.

El término independiente lo obtenemos sabiendo que el plano pasa por el punto $(1,1,0)$.

$$-1+3+0+D=0 \rightarrow D=-2 \rightarrow \Pi:-x+3y+5z-2=0$$

Esta es la ecuación general del plano. Debemos pasar a paramétricas, para ello consideramos dos incógnitas como parámetros libre en la ecuación general.

$$\Pi:\begin{Bmatrix} x=3\alpha+5\beta-2 \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{Bmatrix}$$