Teoría – Tema 3

Teoría - 11 - producto y cociente en notación polar

Producto de complejos en notación polar

Sean dos números complejos en forma polar:

$$z_1 = r_\alpha = r\cdot(\cos\alpha + sen\,\alpha\cdot i)$$
$$z_2 = r'_\beta = r'\cdot(\cos\beta + sen\,\beta\cdot i)$$

Realicemos el producto:

$$z_1\cdot z_2 = r\cdot(\cos\alpha + sen\,\alpha\cdot i)\cdot r'\cdot(\cos\beta + sen\,\beta\cdot i)$$
$$z_1\cdot z_2 = r\cdot r'\cdot(\cos\alpha + sen\,\alpha\cdot i)\cdot(\cos\beta + sen\,\beta\cdot i)$$
$$z_1\cdot z_2 = r\cdot r'\cdot(\cos\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot sen\,\beta\cdot i + sen\,\alpha\cdot\cos\beta\cdot i + sen\,\alpha\cdot sen\,\beta\cdot i^2)$$
$$z_1\cdot z_2 = r\cdot r'\cdot(\cos\alpha\cdot\cos\beta - sen\,\alpha\cdot sen\,\beta + \cos\alpha\cdot sen\,\beta\cdot i + sen\,\alpha\cdot\cos\beta\cdot i)$$
$$z_1\cdot z_2 = r\cdot r'\cdot[(\cos\alpha\cdot\cos\beta - sen\,\alpha\cdot sen\,\beta) + (\cos\alpha\cdot sen\,\beta + sen\,\alpha\cdot\cos\beta)\cdot i]$$
$$z_1\cdot z_2 = r\cdot r'\cdot[\cos(\alpha+\beta) + sen(\alpha+\beta)\cdot i]$$
$$z_1\cdot z_2 = (r\cdot r')_{\alpha+\beta}$$
$$r_\alpha\cdot r'_\beta = (r\cdot r')_{\alpha+\beta}$$

Producto de complejos en forma polar.

$$r_\alpha\cdot r'_\beta = (r\cdot r')_{\alpha+\beta}$$

Es decir, **el resultado de multiplicar dos complejos en forma polar es otro complejo que tiene como módulo el producto de los módulos, y como argumento la suma de los argumentos**.

Una consecuencia de este producto de complejos en forma polar es el caso particular 1_β . Si multiplico $z=r_\alpha$ por 1_β el resultado es el mismo complejo z girado β grados en sentido contrario a las agujas del reloj. Es decir:

$$r_\alpha\cdot 1_\beta = r_{\alpha+\beta}$$

Cociente de complejos en notación polar

Sean dos números complejos en forma polar:

$$z_1 = r_\alpha = r \cdot (\cos\alpha + sen\,\alpha \cdot i)$$
$$z_2 = r'_\beta = r' \cdot (\cos\beta + sen\,\beta \cdot i)$$

Realicemos el cociente:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r \cdot (\cos\alpha + sen\,\alpha \cdot i)}{r' \cdot (\cos\beta + sen\,\beta \cdot i)}$$

Multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r}{r'} \cdot \frac{\cos\alpha + sen\,\alpha \cdot i}{\cos\beta + sen\,\beta \cdot i} \cdot \frac{\cos\beta - sen\,\beta \cdot i}{\cos\beta - sen\,\beta \cdot i}$$

Operamos, recordando que $i^2 = -1$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r}{r'} \cdot \frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot sen\,\beta \cdot i + sen\,\alpha \cdot \cos\beta \cdot i + sen\,\alpha \cdot sen\,\beta}{\cos^2\beta + sen^2\beta}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r}{r'} \cdot \frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta + sen\,\alpha \cdot sen\,\beta + (sen\,\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot sen\,\beta) \cdot i}{\cos^2\beta + sen^2\beta}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r}{r'} \cdot \frac{\cos(\alpha-\beta) + sen(\alpha-\beta) \cdot i}{\cos^2\beta + sen^2\beta}$$

Aplicamos la relación fundamental de trigonometría $\cos^2\beta + sen^2\beta = 1$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r}{r'} \cdot (\cos(\alpha-\beta) + sen(\alpha-\beta) \cdot i)$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{r}{r'}\right)_{\alpha-\beta}$$

Cociente de complejos en forma polar.

$$\frac{z_1}{z_2}=\left(\frac{r}{r'}\right)_{\alpha-\beta}$$

Es decir, **el resultado de dividir dos complejos en forma polar es otro complejo que tiene como módulo el cociente de los módulos, y como argumento la diferencia de los argumentos**.

Una consecuencia de este cociente de complejos en forma polar es el caso particular 1_β . Si divido $z=r_\alpha$ por 1_β el resultado es el mismo complejo z girado β grados en el sentido de las agujas del reloj. Es decir:

$$\frac{r_\alpha}{1_\beta}=r_{\alpha-\beta}$$

También podemos aplicar la notación polar para obtener, de forma sencilla, el inverso de un número complejo; recordando que un número complejo multiplicado por su inverso da 1.

$$r_\alpha\cdot(r_\alpha)^{-1}=1_0 \;\rightarrow\; (r_\alpha)^{-1}=\frac{1_0}{r_\alpha} \;\rightarrow\; (r_\alpha)^{-1}=\left(\frac{1}{r}\right)_{0-\alpha} \;\rightarrow\; (r_\alpha)^{-1}=\left(\frac{1}{r}\right)_{-\alpha} \;\rightarrow\; (r_\alpha)^{-1}=\left(\frac{1}{r}\right)_{360^o-\alpha}$$

Es decir: el inverso de un número complejo z en forma polar es un nuevo complejo, de módulo el inverso del módulo de z , y argumento 360^o menos el argumento de z .