

PROBLÉMA Milyen $0 < a < 1$ esetén van több megoldása az $a^x = \log_a x$ egyenletnek?

Állítás: akkor és csak akkor, ha $0 < a < e^{-e}$.

Bizonyítás: Legyen λ olyan szám, amelyre $a^\lambda = \lambda$ (azaz ahol az $y = x$ egyenest metszi a két görbe). Több metszéspont akkor és csak akkor van, ha $\exists x > \lambda$, amelyre az

$$f(x) := \frac{a^{a^x}}{x} = 1 \quad \text{teljesül.}$$

Vegyük f differenciálhányadosát, azaz

$$f'(x) = \frac{a^{a^x}}{x^2} [a^x \ln(a^x) \cdot \ln a - 1].$$

α) Ha $e^{-e} < a$, akkor

$$(1) \quad -e < \ln a < 0.$$

Másrészt, mivel a $z = y \ln y$ függvénynek $\frac{1}{e}$ -ben van minimuma (ez függvényvizsgálattal könnyen adódik), és ennek értéke $-\frac{1}{e}$ ezért

$$(2) \quad -\frac{1}{e} \leq a^x \ln a^x < 0 \quad (\text{mivel } x > 0, \text{ ezért } a^x < 1).$$

Az (1) és (2) összeszorzásából viszont az adódik, hogy

$$(3) \quad 1 > a^x \ln a^x \ln a > 0,$$

amiből $f'(x) < 0$ -t kapjuk, ami azt jelenti, hogy

$$f(x) \downarrow.$$

Viszont $f(\lambda) = 1$, így azt kapjuk, hogy $\exists x > \lambda$ úgy, hogy $f(x) = 1$ teljesüljön.

β) Ha $a = e^{-e}$, akkor $a^\lambda = \lambda \Leftrightarrow e^{-\lambda e} = \lambda \Rightarrow \lambda = \frac{1}{e}$. Így, ha $x > \lambda$, akkor $a^x \neq a^\lambda = \lambda = \frac{1}{e}$, ami azt jelenti, hogy (2)-ben a bal oldalon $<$ jel van, azaz $f'(x) < 0$ ebben az esetben is, és mivel $f(\lambda) = 1$ ezért $\exists x > \lambda$, hogy $f(x) = 1$ legyen.

γ) Ha $0 < a < e^{-e}$, akkor

$$(4) \quad \lambda^{\frac{1}{\lambda}} = a < e^{-e} = (e^{-1})^{\frac{1}{e^{-1}}}.$$

Mivel a $z = y^{\frac{1}{y}}$ függvény növekvő a $(0, 1)$ -en (ld. függvénydiszkusszió), ezért (4) $\Rightarrow \lambda < e^{-1}$, amiből

$$(5) \quad \lambda^{\frac{1}{\lambda}} = a < e^{-1/\lambda}$$

adódik.

Innen $a^\lambda \ln a^\lambda \ln a - 1 = \lambda^2 (\ln a)^2 - 1 > \lambda^2 \left(-\frac{1}{\lambda}\right)^2 - 1 = 0$, azaz $f'(\lambda) > 0$ és $f(\lambda) = 1$, tehát λ -nak van olyan jobb oldali környezete, ahol $f(x) > 1$. Viszont $f(1) = a^a < 1$, így a Bolzano-Darboux féle tulajdonság miatt a $(\lambda; 1)$ intervallumon valahol kell, hogy az $f(x) = 1$ teljesüljön. Ezzel a bizonyítás kész.

Megjegyzés. A fentiekből adódik, hogy $0 < a < e^{-e}$ esetén (a szimmetriát figyelembevéve) legalább 3 metszéspont van. Több azonban nem lehet, mert ha a $g(x) = a^x - \log_a x$ függvénynek 3-nál több zéróhelye lenne, akkor a Rolle-féle középértéktétel szerint a $g'(x) = a^x \ln a - \frac{1}{x \ln a}$ függvénynek legalább 3 zérushelye lenne, ami ekvivalens azzal, hogy az $a^x \ln a = \frac{1}{x \ln a} \Leftrightarrow x (\ln a)^2 = a^{-x}$ egyenletnek legalább 3 megoldása lenne, ami viszont az a^{-x} függvény szigorú konvex volta miatt lehetetlen, hiszen egy egyenes egy ilyen görbét lefeljebb 2 pontban metszhet.