WEITERBILDUNGSKOLLEG DER BUNDESSTADT BONN ARS ABENDREALSCHULE

Weiterbildungskolleg der Bundesstadt Bonn
Abendrealschule
Mathematik SoSe 2020

Name:____

30.03.2020

Nichtlineares Wachstum

Die Sache mit den Zinseszinsen:

Aufgabe:

Stellen Sie sich vor, Sie könnten 1000 € für 10 Jahre bei einer Bank anlegen und bekämen jährlich 3% Zinsen. Wie hoch ist Ihr Kapital nach dieser Laufzeit?

In der Regel wird diese Aufgabe so gelöst:
3% von 1000 € sind 30 €.
Zehn Jahre 30 €, das bedeutet, 10 • 30 € = 300 €, also hat man nach 10 Jahren 1300 €.
Dies ist jedoch **falsch**, denn die Zinsen entwickeln sich nicht linear, so wie Sie das bei den linearen Funktionen kennengelernt haben, denn am Ende eines jeden Jahres hat sich hat sich Ihr Kapital schon erhöht. Die folgende Tabelle soll Ihnen das verdeutlichen:

Jahre	Startkapital	Zinsen	Endkapital nach einem Jahr
1	1.000,00 €	30,00 €	1.030,00 €
2	1.030,00 €	30,90 €	1.060,90 €
3	1.060,90 €	31,83 €	1.092,73 €
4	1.092,73 €	32,78 €	1.125,51 €
5	1.125,51 €	33,77 €	1.159,27 €
6	1.159,27 €	34,78 €	1.194,05 €
7	1.194,05 €	35,82 €	1.229,87 €
8	1.229,87 €	36,90 €	1.266,77 €
9	1.266,77 €	38,00 €	1.304,77 €
10	1.304,77 €	39,14 €	1.343,92 €

Das Wachstum ist **nicht linear**, weil sich der Grundwert jedes Jahr ändert. Nach zehn Jahren würden Sie also mit der **falschen** Rechnung knapp 44€ Verlust machen.
Wenn Sie sich das Applet in Ihrem GeoGebra-Book im Kapitel Corona anschauen, dann sehen Sie, dass sich die Zahl der Infizierten ebenfalls nicht linear entwickelt. Die **Steigung** der Geraden ändert sich von **Tag zu Tag**. Beim Kapital von **Jahr zu Jahr**.
Man kann diese Änderung in einer Tabelle zusammenfassen, so wie das mit dem Kapital auf diesem Blatt gemacht worden ist, oder in dem Applet. Man kann aber auch einen Funktionsterm entwickeln, so wie ich das jetzt für Sie schrittweise mache. Dafür bezeichne ich den Prozentsatz mit p. In dem Beispiel Ihrer Aufgabe ist **p** also 3%, oder als Bruch $\frac{3}{100}$, bzw. als Dezimalzahl 0,03.
Das Startkapital bekommt als Name die Bezeichnung K_0. Das Kapital nach **einem** Jahr die Bezeichnung K_1, nach zwei Jahren die Bezeichnung K_2, usw.

Somit bekommt man folgende Struktur:
Nach **einem** Jahr:
$K_1 = K_0 + K_0 \cdot p$ ➔ Mit dem Distributivgesetz (Ausklammern) : $K_1 = K_0 \cdot (1+p)$
Nach zwei Jahren:
$K_2 = K_1 + K_1 \cdot p$ ➔ $K_2 = K_1 \cdot (1+p)$ ➔ $K_2 = K_0 \cdot (1+p) \cdot (1+p)$
Nach drei Jahren:
$K_3 = K_2 + K_2 \cdot p$ ➔ $K_3 = K_2 \cdot (1+p)$ ➔ $K_0 \cdot (1+p) \cdot (1+p) \cdot (1+p)$
Nach vier Jahren:
... ➔ ... ➔ $K_4 = K_0 \cdot (1+p) \cdot (1+p) \cdot (1+p) \cdot (1+p)$

Rechnen Sie das bis hier zunächst mit dem obigen Beispiel nach. Sie werden die Zahlen erhalten, wie sie in der Tabelle oben stehen.

Erkenntnis:
Das Kapital wird nur dadurch verändert, **wie oft** man das Startkapital mit dem Term (1+p) multipliziert.
Jetzt ersetzten wir den Term (1+p) durch den Buchstaben q, denn dieser Term ist nichts anderes als eine Zahl, die größer als 1 (es wird ja etwas addiert) ist, in diesem Beispiel ist q = 1,03.
$q \cdot q$ ist q^2 $q \cdot q \cdot q = q^3$ $q \cdot q \cdot q \cdot q = q^4$ ...
Damit gilt für das Beispiel: $K_{10} = K_0 \cdot q^{10}$
Vermutlich ahnen Sie es schon, man kann das jetzt für jeden beliebigen Zinssatz und für jedes beliebige Kapital machen, dann hat man eine Funktion, die folgende Gestalt hat:

$$f(x) = K_0 \cdot q^x$$

Das schwierige hierbei ist, dass die Variable x als sogenannter Exponent aufritt.
Ist in einer solchen Funktion das q größer als 1, wächst die Funktion und wird deshalb Wachstumsfunktion genannt. Da das x als Exponent auftritt, spricht man von exponentiellem Wachstum. Leider ist das exponentielle Wachstum der Normalfall.