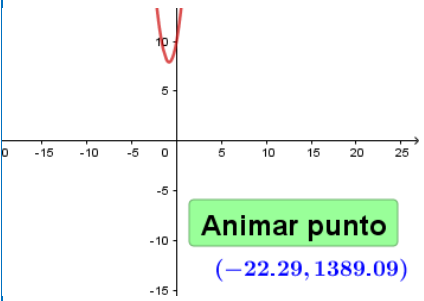


# Límite de una Función: Límites que comprenden el infinito

**Idea principal del recurso educativo digital:** Mostrar la solución de algunos ejemplos de límites que comprenden el infinito.

**Propósito de aprendizaje del recurso educativo digital:** Comprender las técnicas que se utilizan para resolver ciertos tipos de límites que comprenden el infinito

	Narración	Descripción pantalla	Interactividad							
<p><b>Introducción</b></p> <p>Para hacer uso del recurso el docente debe recordar temas como: propiedades de los límites; límite de una suma</p> $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x),$ <p>límite de una resta</p> $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x),$ <p>límite de un producto</p> $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) * g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) * \lim_{x \rightarrow a} g(x),$ <p>límite de un cociente</p> $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)},$ <p>operaciones entre polinomios, propiedades de potencias.</p>	<p>Al ingresar al recurso el docente se encontrará con dos pantallas: En la ventana del lado derecho el docente podrá elegir el ejemplo que desee:</p> <div data-bbox="596 548 905 776" style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p style="text-align: center; color: red; font-weight: bold;">Límites que comprenden el infinito</p> <table style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td><math>\lim_{x \rightarrow \infty} (3n^2 + 5n + 10)</math></td> <td><math>\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}</math></td> </tr> <tr> <td><b>Ejemplo 1</b></td> <td><b>Ejemplo 2</b></td> </tr> <tr> <td><math>\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5n^2 - 8n + 2}{2n^2 - 3n}</math></td> <td><math>\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{3 - x}</math></td> </tr> <tr> <td><b>Ejemplo 3</b></td> <td><b>Ejemplo 4</b></td> </tr> </table> </div> <p>En la ventana del lado izquierdo se graficará la función correspondiente al ejemplo y aparecerá un punto sobre la función el cual se podrá animar para poder ver las coordenadas del punto y hacia donde tiende el límite (infinito).</p> <p>Cuando el docente seleccione el ejercicio, esta ventana quedará en azul y al oprimir el botón <b>Siguiente</b> se mostrará la solución del ejercicio paso a paso (en cada clic aparecerá un paso nuevo).</p> <div data-bbox="470 1136 890 1435" style="text-align: center;">  <p style="background-color: #90EE90; padding: 5px; display: inline-block;"><b>Animar punto</b></p>  <p style="color: red;">(-22.29, 1389.09)</p> </div> <p>Al finalizar la explicación del ejercicio en la ventana de la izquierda se mostrará la función, el punto al que tiende el límite, sus coordenadas y el botón "Animar punto":</p> <p>Al seleccionar este botón el punto sobre la gráfica comenzará a moverse sobre la función.</p>	$\lim_{x \rightarrow \infty} (3n^2 + 5n + 10)$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}$	<b>Ejemplo 1</b>	<b>Ejemplo 2</b>	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5n^2 - 8n + 2}{2n^2 - 3n}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{3 - x}$	<b>Ejemplo 3</b>	<b>Ejemplo 4</b>	<p>Los elementos interactivos que se encuentran en el recurso digital son:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Botones con los que puede seleccionar el ejemplo que se desea ver/explicar.             <div data-bbox="1591 548 1738 597" style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block; margin: 5px;">Ejemplo 1</div> </li> <li>• Botón de inicio cuando se selecciona cualquiera de los ejemplos: Al seleccionar este botón el recurso se regresa a la pantalla principal.             <div data-bbox="1612 721 1717 769" style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block; margin: 5px;">Inicio</div> </li> <li>• Botón de siguiente: El botón siguiente permite mostrar el paso a paso del desarrollo de los ejercicios.             <div data-bbox="1591 873 1738 922" style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block; margin: 5px;">Siguiente</div> </li> <li>• Botón animar punto: Con este botón el docente podrá animar el punto sobre la función.             <div data-bbox="1549 997 1780 1045" style="background-color: #90EE90; padding: 5px; display: inline-block; margin: 5px;">Animar punto</div> </li> <li>• Botón reproducir: este botón puede aparecer en dos maneras:             <ul style="list-style-type: none"> <li>○ En la ventana de la izquierda: animará en y detendrá el punto que se muestra, se recomienda utilizarse para parar el punto cuando se quieran analizar las coordenadas.                     <div data-bbox="1625 1240 1709 1279" style="text-align: center;">▶ ⏸</div> </li> <li>○ En la ventana de la izquierda: este botón tiene diferentes efectos en esta pantalla, como reiniciar el recurso educativo digital, así que se recomienda no oprimirlo en ninguna circunstancia.                     <div data-bbox="1667 1435 1709 1468" style="text-align: center;">▶</div> </li> </ul> </li> </ul>
$\lim_{x \rightarrow \infty} (3n^2 + 5n + 10)$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}$									
<b>Ejemplo 1</b>	<b>Ejemplo 2</b>									
$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5n^2 - 8n + 2}{2n^2 - 3n}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{3 - x}$									
<b>Ejemplo 3</b>	<b>Ejemplo 4</b>									

El docente ingresará al recurso, en la primera pantalla se encuentran los ejercicios estratégicamente propuestos.

En cada uno de los ejemplos primero se muestra su desarrollo y después se muestra el botón "animar punto" que pretende que de manera gráfica el docente muestre que efectivamente la componente en  $y$  de la coordenada tiende al resultado encontrado analíticamente, para esto se debe pausar en diferentes momentos la animación y resaltar que el número se acerca al resultado.

En el primer ejercicio, se recurre a la propiedad del límite de una suma para explicar de manera individual porqué el resultado de cada uno de los límites es infinito.

Para el segundo ejercicio el docente debe animar el punto, al hacer esto aparecerá una tabla, donde aparecen valores que toma  $f(x)$  cuando  $x$  se vuelve muy grande, deduciendo así que el límite debe ser  $0$  pues los valores de  $f(x)$  se aproximan a este número, al hacer clic en el botón siguiente se detendrá la animación y mostrará este resultado; posteriormente se analizará de la misma manera el límite cuando  $x \rightarrow -\infty$ . Para finalizar se generalizará esta propiedad para la función  $\frac{1}{x^n}$ .

Al ingresar al recurso el docente se encontrará con la siguiente pantalla, donde se muestran los ejemplos propuestos, organizados de menor a mayor dificultad.

### Límites que comprenden el infinito

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (3n^2 + 5n + 10)$$

Ejemplo 1

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}$$

Ejemplo 2

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5n^2 - 8n + 2}{2n^2 - 3n}$$

Ejemplo 3

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{3 - x}$$

Ejemplo 4

Cada vez que el docente seleccione un botón con el ejemplo que desea ver, se presentará la solución del ejercicio. **Ejemplo:**

Ejemplo 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (3n^2 + 5n + 10)$$

Inicio

Siguiente



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

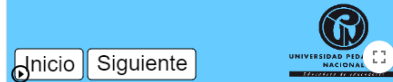
CORREO ELECTRÓNICO

Dentro de la pantalla en la cual va a aparecer el desarrollo del ejemplo, se encuentra el botón **Siguiente** el cual indica el paso siguiente del desarrollo del ejemplo, este botón se desaparecerá al encontrar el resultado, así se sabrá que el desarrollo ha terminado:

En este recurso el docente encontrará una serie de ejercicios en los cuales la interacción es limitada al uso de los botones que se explica en el desarrollo de esta tabla.

El tercer y cuarto ejercicio se solucionan de manera similar; inicialmente el docente debe recalcar que es importante determinar el grado del polinomio del denominador y dividir entre este toda la función, posteriormente realizar las operaciones algebraicas necesarias y para finalizar resolver el límite.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (3n^2 + 5n + 10) \\ = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} 3n^2 \right) + \left( \lim_{n \rightarrow \infty} 5n \right) + \left( \lim_{n \rightarrow \infty} 10 \right)$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} (3n^2 + 5n + 10) \\ = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} 3n^2 \right) + \left( \lim_{n \rightarrow \infty} 5n \right) + \left( \lim_{n \rightarrow \infty} 10 \right)$$


Sabemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 3n^2 = \infty ; \lim_{n \rightarrow \infty} 5n = \infty ; \lim_{n \rightarrow \infty} 10 = \infty$$

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (3n^2 + 5n + 10) = \infty$$



Al finalizar cada pantalla se encuentra el botón , el cual devolverá el recurso educativo digital a la pantalla principal

### Conclusión o desenlace

Mostrar que existen ciertos ejercicios de límites que comprenden el infinito que se pueden resolver a través de una secuencia de datos, con el fin que el estudiante agrupe los ejercicios según las técnicas explicadas en los ejemplos.

Analizar gráficamente el  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$ , puesto que es la base teórica para el desarrollo de los siguientes ejemplos.