즐거운 미적분학

교과서 134쪽	치환적분법	학번 이름	학습 확인

치환적분법

미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $x=g(t)$로 놓으면 $\longrightarrow$ $dx = g'(t)dt$

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$$

문제1. 다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int \sin(5x-2)\,dx$

$5x-2=t$ 라 두면 $5dx = dt$
$dx = \frac{1}{5}dt$ 이다.

$= \frac{1}{5}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{5}\cos t + C$

$= -\frac{1}{5}\cos(5x-2) + C.$

(2) $\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$

$\sqrt{x-1} = t$라 두면 $\frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}}dx = dt$
$\frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = 2dt$ 이다

$x-1=t^2$, $x=t^2+1$ 이므로

$2\int t^2+1\,dt = 2\left[\frac{1}{3}t^3+t\right]+C$

$= \frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x-1} + C$

$= \frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x-1} + C.$

문제2. 다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int \frac{\ln x}{x}dx$

$\ln x = t$라 두면 $\frac{1}{x}dx = dt$ 이다.

$\int t\,dt = \frac{1}{2}t^2 + C$

$= \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$

(2) $\int \tan x \sec^2 x\,dx$

$\tan x = t$라 두면 $\sec^2 x\,dx = dt$ 이다.

$\int t\cdot dt = \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}\tan^2 x + C$

문제3. 다음 부정적분의 값을 구하시오.

(1) $\int \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}dx$

$e^x - e^{-x} = t$라 두면 $(e^x+e^{-x})dx = dt$ 이다.

$\int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + C$

$= \ln|e^x - e^{-x}| + C$

(2) $\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx$

$\sin x = t$ 라 두면 $\cos x\,dx = dt$ 이다.

$\int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + C$

$= \ln|\sin x| + C.$

즐거운 미적분학

정적분의 치환적분법

닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 미분가능한 함수 $x=g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$일 때, α, β를 포함하는 구간에서 연속이면

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

문제4. 다음 정적분의 값을 구하시오.

(1) $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}dx$

$\ln x = t$라 두면 $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x}dx = dt \text{ 이다.} \\ x=1\text{일때 } t=\ln 1 = 0 \\ x=e\text{일때 } t=\ln e = 1 \end{array} \right.$

$$\int_0^1 t^2 dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

(2) $\int_1^2 x\sqrt{x^2-1}\,dx$

$x^2-1=t$ 라 두면 $\left\{ \begin{array}{l} 2x\,dx = dt \text{ 이다.} \\ x=1 \to t=0 \\ x=2 \to t=3 \end{array} \right.$

$$\frac{1}{2}\int_0^3 \sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^3$$
$$= \frac{1}{3}\cdot 3\sqrt{3}$$
$$= \sqrt{3}$$

~~문제~~5. 정적분 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$의 값을 구하시오.

$x=\sin\theta$ $\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ 라 두면 일대일 대응이다.

왜?

$\left\{ \begin{array}{l} dx = \cos\theta\, d\theta \\ x=0=\sin\theta \text{ 일때 } \theta=0 \\ x=\frac{1}{2}=\sin\theta \text{ 일때 } \theta=\frac{\pi}{6} \end{array} \right.$

$1-x^2 = 1-\sin^2\theta = \cos^2\theta$ 이므로 $\sqrt{1-x^2}=\sqrt{\cos^2\theta}=|\cos\theta|$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{|\cos\theta|}\cdot\cos\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos\theta}{\cos\theta}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 1\, d\theta$$

왜?

$$= [\theta]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6}.$$