Problemas – Tema 5

Problemas resueltos - 3 - condiciones de contorno para obtener constante de integración

1. Hallar la primitiva de la función $f(x)=\frac{3}{(x+1)^2}$ **que pasa por el punto** $(0,1)$ **.**

Recordamos la derivada de la función inversa → $\frac{d}{dx}[\frac{1}{f(x)}]=\frac{-f'(x)}{f^2(x)}$

Por lo tanto:

$$\int \frac{3}{(x+1)^2}dx=\frac{-3}{x+1}+C$$

Elegimos la primitiva $F(x)$ que pase por el punto $(0,1)$. Es decir:

$$F(0)=1\rightarrow\frac{-3}{0+1}+C=1 \quad\rightarrow\quad C=4 \quad\rightarrow\quad F(x)=\frac{-3}{x+1}+4$$

2. Determina la ecuación de la curva $F(x)$ que verifica que $F(1)=2$, $F'(0)=3$ y $F''(x)=12x+3$.

Nos dan la segunda derivada de una función. Por lo tanto, debemos integrar dos veces.

$$F'(x)=\int F''(x)\,dx \quad \rightarrow \quad F'(x)=\int (12x+3)\,dx=6x^2+3x+C$$

Utilizamos la condición de contorno $F'(0)=3$ para obtener la constante de integración C .

$$F'(0)=3 \quad \rightarrow \quad 0+0+C=3 \quad \rightarrow \quad C=3 \quad \rightarrow \quad F'(x)=6x^2+3x+3$$

Volvemos a integrar.

$$F(x)=\int F'(x)\,dx \quad \rightarrow \quad F(x)=\int (6x^2+3x+3)\,dx=2x^3+\frac{3x^2}{2}+3x+D \quad .$$

Aplicamos la segunda condición de contorno para obtener D .

$$F(1)=2 \quad \rightarrow \quad 2\cdot 1+\frac{3\cdot 1}{2}+3\cdot 1+D=2 \quad \rightarrow \quad D=\frac{-9}{2} \quad \rightarrow \quad F(x)=2x^3+\frac{3x^2}{2}+3x-\frac{9}{2}$$

3. Determina la ecuación de la curva $F(x)$ que verifica que $F(0)=-5$, tiene un mínimo relativo en el punto de abscisa $x=2$ y $F''(x)=6x^2-12x$.

El mínimo relativo genera la condición $F'(2)=0$, ya que la primera derivada se anula en un extremo relativo.

Debemos integrar dos veces y aplicar las dos condiciones de contorno para determinar, de manera única, las constantes de integración.

$$F'(x)=\int F''(x)\,dx \quad\rightarrow\quad F'(x)=\int (6x^2-12x)\,dx=2x^3-6x^2+C$$

$$F'(2)=0 \quad\rightarrow\quad 16-24+C=0 \quad\rightarrow\quad C=8 \quad\rightarrow\quad F'(x)=2x^3-6x^2+8$$

Integramos nuevamente.

$$F(x)=\int F'(x)\,dx=\int (2x^3-6x^2+8)\,dx=\frac{x^4}{2}-2x^3+8x+D$$

$$F(0)=-5 \quad\rightarrow\quad 0-0+0+D=-5 \quad\rightarrow\quad D=-5 \quad\rightarrow\quad F(x)=\frac{x^4}{2}-2x^3+8x-5$$