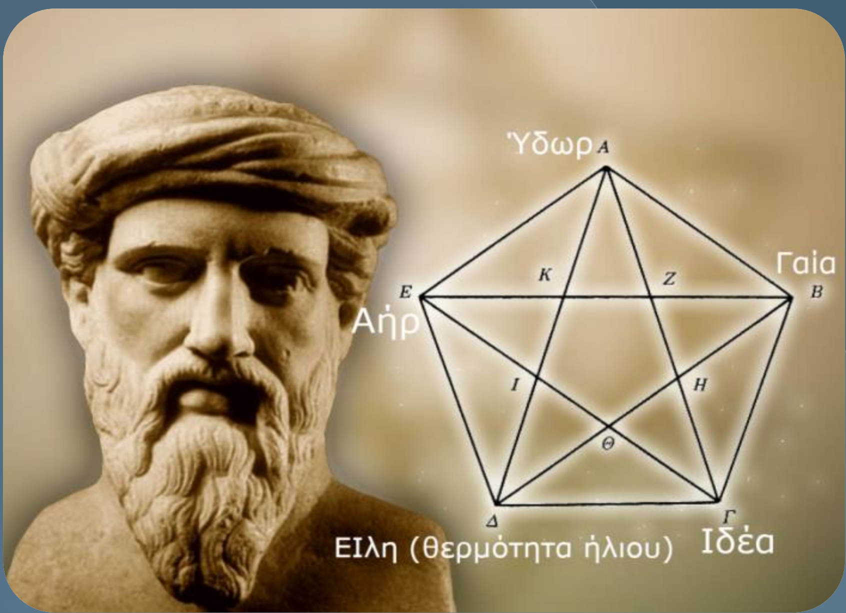
Μ. Τσιλπιρίδης
Μαθηματικός MSc Δ.τ.Μ

Πανεπιστήμιο Αθηνών
Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα
Διδακτικής και Μεθοδολογίας
των Μαθηματικών

Ενσωμάτωση της Τεχνολογίας στη Δ.τ.Μ

η δυναμική της **Ευκλείδειας Γεωμετρίας** στα σύγχρονα Μαθηματικά

δίαυλοι επικοινωνίας μεταξύ της Άλγεβρας, Αναλυτικής και Ευκλείδειας Γεωμετρίας



Περιλαμβάνει δραστηριότητες με ψηφιακά δομήματα για την αναβάθμιση του μαθήματος της Γεωμετρίας στο Λύκειο

διδακτικές παρεμβάσεις για τη Β΄ Λυκείου

"ισχυροί παιδαγωγικοί, διδακτικοί και πολιτιστικοί λόγοι συνηγορούν για τη διατήρηση και ενδυνάμωση ενός ανεξάρτητου μαθήματος Ευκλείδειας Γεωμετρίας στο Λύκειο."
(Ι. Θωμαΐδης)

Φαίνεται σαν η μεγαλοφυΐα σπρωγμένη από έμπνευση, να ξέρει από το ξεκίνημα, το σκοπό που πρέπει να πετύχει, μ' έναν νεφελώδη τρόπο. Στο βασανιστικό της ταξίδι, μέσ' από μια αχαρτογράφητη περιοχή, ενισχύει την πεποίθησή της με επιχειρήματα που ακολουθούν μάλλον κάποιο φροϋδικό παρά λογικό πλάνο. Τα επιχειρήματα αυτά από τη φύση τους δεν μπορεί να είναι άψογα, αφού ουσιαστικά εξυπηρετούν μια διορατική και –συχνά–υποσυνείδητη έμπνευση. Στ' αλήθεια, δεν μπορούμε να απαιτούμε αυτά να είναι άψογα με αυστηρά κριτήρια, αφού, αυτός που δημιουργεί μια επιστημονική επανάσταση πρέπει να χτίσει πάνω στις ιδέες που –αργότερα– πρέπει να αντικαταστήσει!

Εισαγωγή

Το Νοέμβριο του 1959, η Ευρωπαϊκή Οργάνωση για την Οικονομική Συνεργασία, οργάνωσε κοντά στο Παρίσι ένα συνέδριο, με αντικείμενο την αναμόρφωση των εκπαιδευτικών προγραμμάτων για τα μαθηματικά στη μέση εκπαίδευση. Η μεταρρύθμιση των «Μοντέρνων Μαθηματικών» ("New Math" στην Αμερική) που κυριαρχεί ακόμη στα εκπαιδευτικά προγράμματα, είναι επηρεασμένη σε μεγάλο βαθμό από τις αποφάσεις αυτής της συνάντησης.

Πρωταγωνιστής του συνεδρίου ήταν ο κορυφαίος Γάλλος μαθηματικός **Jean Dieudonné**, συνιδρυτής της θρυλικής ομάδας που, με το ψευδώνυμο «Nicolas Bourbaki», κυριάρχησε στη μαθηματική σκέψη του 20ου αιώνα. Η ομιλία του, με τίτλο *«Κάτω ο Ευκλείδης» (A bas Euclide!)* και η αντικατάστασή της από στοιχεία της Γραμμικής Άλγεβρας και της Αναλυτικής Γεωμετρίας, υπήρξε έκτοτε καθοριστική στη διαμόρφωση των σχολικών μαθηματικών στο Δυτικό κόσμο.

Σήμερα:

- Η Ευκλείδεια Γεωμετρία (Ε.Γ), έχει αλλού πλήρως εξοβελιστεί από τα προγράμματα και αλλού, όπως και στην Ελλάδα, έχει συρρικνωθεί και υποβαθμιστεί τόσο, που έχει απολέσει την όποια πολιτιστική, παιδαγωγική και διδακτική της αξία.
- Τα νέα αναλυτικά προγράμματα με στοιχεία νεώτερων μαθητικών από την ομάδα Bourbaki, κατέρρευσαν, χωρίς όμως παράλληλα να επανέλθει η διδασκαλία της Ε.Γ σε αρκετές από τις χώρες που υιοθέτησαν αυτή τη στάση.

Ωστόσο, μετά από την αδιέξοδη αυτή στροφή, το μεγάλο και διαχρονικά επίκαιρο ερώτημα παραμένει:

"ποια διδακτικά αντικείμενα μπορούν να αντικαταστήσουν επάξια την Ευκλείδεια Γεωμετρία;"

Κανένα από όσα προτάθηκαν ως τώρα, δεν φαίνεται να συγκεντρώνει όχι την ομοφωνία, αλλά ούτε καν την πλειοψηφία στο χώρο αυτών που ασχολούνται με τη μαθηματική εκπαίδευση. Ο ίδιος ο εμπνευστής αυτής της αλλαγής Jean Dieudonné, φαίνεται να ομολόγησε την οικτρή αποτυχία αυτής της μεταρρύθμισης. Κατά συνέπεια, είναι απαραίτητο, να επαναπροσδιορίσουμε τους βασικούς λόγους του ιδιόμορφου αυτού τέλματος και μέσω αυτών να εξετάσουμε κίνητρα τόσο για μαθητές όσο και για διδάσκοντες για την αναβάθμιση του συγκεκριμένου μαθήματος. Ενός μαθήματος, που σύμφωνα με τους διδακτικούς στόχους του προγράμματος σπουδών για το Λύκειο του 2011, έχει σκοπό *«να μυήσει το μαθητή στη διαδικασία της μαθηματικής απόδειξης και να του αναπτύξει μαθηματική σκέψη"* καθώς και *«Η ενότητα «Γεωμετρία» αποτελεί την εισαγωγή των μαθητών στη Θεωρητική Γεωμετρία, η οποία είναι το κατεξοχήν πεδίο που μπορεί να μεταφέρει στους μαθητές την ενιαία δομή και τη συνοχή των Μαθηματικών.»*[1]

Σχετικά με την πραγματικότητα στη χώρα μας, από ερευνητικά δεδομένα της τελευταίας 15ετίας διακεκριμένων μαθηματικών και ερευνητών, τα βασικά προβλήματα σχετικά με τη διδασκαλία του μαθήματος της Ε.Γ μπορούν συνοπτικά να περιγραφούν από τα επόμενα:

- **Η ασυνέχεια στη διδασκαλία της Γεωμετρίας στο Γυμνάσιο και το Λύκειο.** Η πλειοψηφία των μαθητών της Γ΄ Γυμνασίου, έχει εμπειρικές και αποσπασματικές γνώσεις σχετικά με την Ε.Γ που δεν είναι συμβατές με την αξιωματική θεμελίωση του μαθήματος. Το αποτέλεσμα είναι η δυσκολία τόσο της εύρεσης

[1] (Φ.Ε.Κ. Β΄ 1168, σ.16674)

όσο και της διατύπωσης –τεκμηρίωσης των απαιτούμενων αποδείξεων καθώς και η κατανόηση της λειτουργίας της στη δόμηση παραγωγικών επιχειρημάτων.

- **Ο μονομερής θεωρητικός προσανατολισμός της Ε.Γ στο Λύκειο.** Η έλλειψη διδασκαλίας γεωμετρικών κατασκευών και γεωμετρικών τόπων, αποστερεί από τη διδασκαλία της Ε.Γ, την πεμπτουσία καθώς και το πλέον ουσιαστικό πεδίο εφαρμογών της. Αυτό έχει ως άμεσο αποτέλεσμα, τη δημιουργία εντύπωσης ότι η Ε.Γ αναπτύσσεται στο Λύκειο ως ένα εντελώς θεωρητικό και αυτοτελές μάθημα, λόγω της ουσιαστικής έλλειψης μαθησιακών κινήτρων που προσφέρει ένα σαφές πεδίο εφαρμογών. Η ένταξη συνεπώς στη διδασκαλία του μαθήματος μέρους αυτών, σε συνδυασμό με την ενσωμάτωση των ΤΠΕ και τη σύνθεση ελκυστικών εφαρμογών, είναι πιθανό να οδηγήσει σε ένα νέο πλαίσιο λειτουργίας του μαθήματος.

- **Η έλλειψη διαύλων επικοινωνίας ανάμεσα σε Ε.Γ, Αναλυτική Γεωμετρία και Άλγεβρα που διδάσκονται ως ερμητικά κλειστοί αμφότερα κλάδοι στην Α΄ και Β΄ Λυκείου.** Η σχεδόν εμμονική αντίληψη της διατήρησης μιας «καθαρότητας» του μαθήματος της Ε.Γ , έχει ως αποτέλεσμα την αποφυγή συνδέσεων του μαθήματος με κλάδους της Άλγεβρας ή/και της Τριγωνομετρίας καθώς και της Αναλυτικής Γεωμετρίας (αν και η αντίστροφη συσχέτιση είναι πολύ συνηθισμένη). Κατά συνέπεια, δημιουργείται η εντύπωση ενός ερμητικά κλειστού χώρου των Μαθηματικών (και άρα εν δυνάμει μιας περιοχής που εμπεριέχει ή δημιουργεί αποκλεισμούς).

- **Η ασυμβατότητα της ύλης και των στόχων της Ε.Γ με την ουσιαστική χρήση των ΤΠΕ στη διδασκαλία της.** Οι ΤΠΕ (Τεχνολογίες Πληροφορικής και Επικοινωνιών) έχουν μελετηθεί –και συνεχίζουν να μελετώνται- διεξοδικά από ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών. Αν και τα θεωρητικά πλαίσια χρήσης και ένταξής τους στην εκπαιδευτική καθημερινότητα διαφέρουν από εκείνα της παραδοσιακής διδασκαλίας, εν τούτοις υιοθετούν διδακτικές προσεγγίσεις που ενσωματώνουν πλήρως διαδικασίες διερεύνησης, διατύπωσης εικασιών, ελέγχου, απόρριψης και γενίκευσης. Ένα σύνολο δηλαδή δομικών συστατικών με ζωτική σημασία για την κατανόηση στα Μαθηματικά, που όμως θεωρείται ότι βρίσκεται στον αντίποδα της θεωρητικής θεμελίωσης και της –ιδιότυπης- «καθαρότητας» της Ε.Γ. Όπως επομένως είναι σαφές, απαιτείται ριζική αναμόρφωση του αναλυτικού προγράμματος και των διδακτικών στόχων, ώστε να υπάρξει ουσιαστική ενσωμάτωση των ΤΠΕ στη διδακτική της Γεωμετρίας.

- **Η ασυμβατότητα διδακτέας ύλης και διαθέσιμου διδακτικού χρόνου.** Η συρρίκνωση της διδασκαλίας του μαθήματος από τα 4 στα 2 έτη, προκαλεί μια διαχρονική αδυναμία ολοκλήρωσης της ύλης (με αποκορύφωμα την κατάργηση επί σειρά δεκαετιών της στερεομετρίας). Δεδομένου ότι η πρόταση για αύξηση των ωρών διδασκαλίας του μαθήματος φαίνεται ουτοπική, είναι προφανές ότι η πλέον ρεαλιστική πρόταση θα μπορούσε να αφορά στην αναδιοργάνωση της ύλης καθώς και ριζικές αλλαγές στις μεθόδους διδασκαλίας του μαθήματος.

- **Η απαξίωση του μαθήματος στην εκπαιδευτική καθημερινότητα :** Η απουσία του μαθήματος της Ε.Γ από τα γραπτώς εξεταζόμενα μαθήματα στη Β΄ Λυκείου καθώς και η μη εξέτασή του στις Πανελλαδικές εξετάσεις εδώ και δεκαετίες, οδηγεί συχνά σε φαινόμενα άτυπης απαξίωσής του (ώρες του μαθήματος χρησιμοποιούνται συχνά για κάλυψη αναγκών της Άλγεβρας κ.ά). Οι συνέπειες αυτής της –έμμεσης- υποβάθμισης του μαθήματος σε συνδυασμό και με τους προαναφερόμενους λόγους, είναι ορατές και στη Γ΄ Λυκείου, με εμφανή την αδυναμία των μαθητών στη γεωμετρική αναπαράσταση και ερμηνεία σημαντικών εννοιών και θεωρημάτων του Απειροστικού Λογισμού, που αποτελεί προϋπόθεση για τη σχεσιακή κατανόησή τους (βλ. effective intuitive understanding).

Οι απαντήσεις στα βασικά αυτά προβλήματα, θα καθορίσουν σε μεγάλο βαθμό τη δέσμη προτάσεων που είναι αναγκαίες για τη δημιουργία ενός πραγματικά νέου και σύγχρονου προγράμματος σπουδών Ε.Γ στο Λύκειο.

Η παρούσα συλλογή δραστηριοτήτων στοχεύει στον εμπλουτισμό της διδασκαλίας των Μαθηματικών στη **Β΄ Λυκείου Προσανατολισμού**.
Έχουν συμπεριληφθεί δραστηριότητες που πλαισιώνονται από ψηφιακά δομήματα, των οποίων δίνονται οι ηλεκτρονικές διευθύνσεις τους (links) για πρόσβαση και εμπλοκή των μαθητών σε διαδικασίες μάθησης μέσω συμμετοχής, πειραματισμού και διερεύνησης[2]. Στόχος είναι να δημιουργηθούν νησίδες γόνιμης σύνδεσης της Ε.Γ με την Αναλυτική Γεωμετρία και την Άλγεβρα, ώστε να αμβλυνθεί η εντύπωση που έχουν οι μαθητές ότι οι συγκεκριμένοι χώροι των Μαθηματικών λειτουργούν ερμητικά κλειστοί ο ένας ως προς τον άλλο. Μέσω κατάλληλα σχεδιασμένων ψηφιακών δομημάτων, οι μαθητές προκαλούνται να πειραματιστούν, να διατυπώσουν εικασίες και στη συνέχεια να ελέγξουν την ορθότητά τους χρησιμοποιώντας τυπικές αποδεικτικές διαδικασίες και από τους τρεις αυτούς κλάδους των Μαθηματικών. Με άλλα λόγια επιδιώκουμε τη συνεχή ανάδειξη της **συμπληρωματικότητας της "καθαρής" και "εφαρμοσμένης" πλευράς** των Μαθηματικών.

Τέλος, πολύ συχνά, οι μαθητές θα έχουν την ευκαιρία να συνθέτουν περάσματα από τα μαθηματικά (με την έννοια του έτοιμου προϊόντος), στη "μαθηματικοποίηση" και στις διαδικασίες που τη συγκροτούν: στη "διερεύνηση", στο "συλλογισμό" και στην "επικοινωνία" (Winter 1975). Ταυτόχρονα και σε όλη την έκταση του παρόντος, επιχειρούμε τη δημιουργία προκλήσεων ώστε οι μαθητές να διαπιστώσουν την αμεσότητα αλλά και την *απαράμιλλη κομψότητα* των μεθόδων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, συμπεραίνοντας αυθόρμητα ότι:

«Είναι εξαιρετικά δύσκολο να βρεθεί διδακτικό αντικείμενο που να υποκαθιστά επάξια τη σημασία της διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας»!

Μ. Τσιλπιρίδης
Μάρτιος 2020

Πηγές για τη συγγραφή του εισαγωγικού σημειώματος

- Κλαουδάτος, Ν., Παπασταυρίδης, Σ. (1997). *Θέματα διδακτικής μαθηματικών ΙΙΙ. Τα μαθηματικά του σχολείου και ο πραγματικός κόσμος: Πώς θα συνδέσουμε θεωρία και πράξη*. Αθήνα: Gutenberg
- Ι. Θωμαΐδης: Η κατανόηση της αξιωματικής θεμελίωσης και η αποδεικτική ικανότητα των μαθητών στο μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Στο Μ. Κούρκουλος *et al* [επιμ.] *Πρακτικά 2ης Διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών*, σσ.127–136. Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Πανεπιστημίου Κρήτης, Ρέθυμνο, 2000.
- Κυνηγός, Χ. (2006). *Το μάθημα της διερεύνησης. Παιδαγωγική αξιοποίηση των ψηφιακών τεχνολογιών για τη διδακτική των μαθηματικών. Από την έρευνα στη σχολική τάξη.* Αθήνα: Εκδόσεις Ελληνικά Γράμματα
- Allen Leung, (2009). *Written proof in dynamic Geometry environment: Inspiration from a student's work*
- Baccaglini-Frank, A., & Mariotti, M. A. (2010). *Generating conjectures in dynamic geometry: The maintaining dragging model. International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 15(3), 225-253
- Π. Αργύρη: *Οι πεποιθήσεις των μαθητών και των εκπαιδευτικών για την απόδειξη στη Γεωμετρία*. Διπλωματική Εργασία. στο Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών "Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών". Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών, 2010.
- Θ. Μακάριος & Ο. Κωνσταντινίδου: Η διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στο Λύκειο. Αδιέξοδο και υπέρβαση. *Πρακτικά 3ης Μαθηματικής Εβδομάδας*, σσ.659–676. Ε.Μ.Ε., Παράρτημα Κ. Μακεδονίας, Θεσσαλονίκη, 2011.
- Συλλογικό έργο Δ. Λάππα, Π. Σπύρου, Π. Στράντζαλου κ.α: Η Γεωμετρία και η Διδακτική της στη Σύγχρονη Εκπαίδευση, Εκδ. Ζήτη, 2010.
- Θαλής +Φίλοι: Πρακτικά «Οδός Ευκλείδου: Ο δρόμος που χάσαμε», 2014.

[2] Βλ. και διπλ. Εργασία Μ. Τσιλπιρίδη «Αιτιολογία από /ή για ερμηνεία στο μαθηματικό συλλογισμό με τη διαμεσολάβηση ψηφιακών εργαλείων δυναμικής γεωμετρίας» του Μεταπτυχιακού Τμήματος της Διδακτικής των Μαθηματικών Ε.Κ.Π.Α»,.

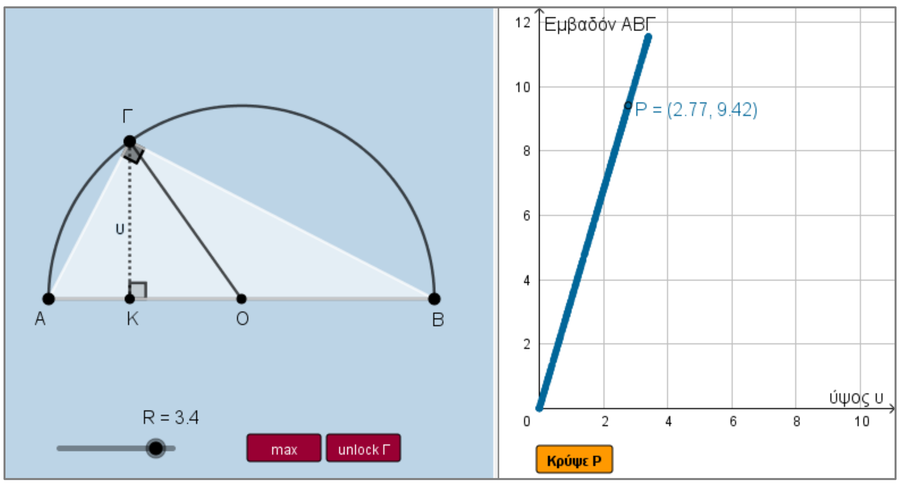
Περιεχόμενα

Δραστηριότητα 1

Δ1. Κάθετα και πλάγια τμήματα: Μεγιστοποίηση εμβαδού

Έχουμε έναν προβολέα στο σημείο Γ, με "άνοιγμα" 90^0 της φωτεινής δέσμης που εκπέμπει . Ο προβολέας θα φωτίζει τη σκηνή ΑΒ και θα τοποθετηθεί σε κάποιο σημείο του ημικυκλίου διαμέτρου ΑΒ.

Πού θα πρέπει να τοποθετήσουμε τον προβολέα ώστε να φωτίζει τη μέγιστη δυνατή επιφάνεια έως τη σκηνή ΑΒ;



https://www.geogebra.org/m/qtvtmewk#material/y6qyv3wr

Οδηγίες

Στη δραστηριότητα εξετάζουμε το εξής πρόβλημα:

*"από όλα τα ορθογώνια τρίγωνα που είναι εγγεγραμμένα σε ημικύκλιο, ποιο έχει το **μέγιστο εμβαδόν**".*

Στο δόμημα εμφανίζεται ένα ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ και ένα τυχαίο σημείο Γ σε αυτό. Στο 2^o παράθυρο γραφικών, εμφανίζεται ένα σημείο P που έχει συντεταγμένες (υ,Ε), όπου υ είναι το ύψος ΓΚ και Ε, το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. Με άλλα λόγια, το σημείο P, αναπαριστά τη συμμεταβολή Ε(υ).

Προαπαιτούμενες γνώσεις: Εμβαδόν τριγώνου, σχέση πλάγιων και κάθετων τμημάτων, γραφική παράσταση παραβολής.

πειραματισμός – εικασία - αιτιολόγηση

1. Πειραματιστείτε για διάφορες θέσεις του σημείου Γ σύροντάς το.
2. Εκφράστε συντακτικά τον τύπο που περιγράφει το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ χρησιμοποιώντας το ύψος υ.

3. Πατήστε το κουμπί "Εμφάνισε P" για να εμφανιστεί το σημείο P. Στο 2ο παράθυρο, εμφανίζεται η γραμμή που διαγράφει ένα σημείο P. Αυτή η γραμμή, περιγράφει <u>τη μεταβολή του εμβαδού Ε του τριγώνου ΑΒΓ σε σχέση με το ύψος του υ.</u>
4. Τί είδους γραμμή διαγράφει το σημείο P; Μπορείτε να αιτιολογήσετε την απάντησή σας;
5. Από τη μορφή της γραμμής του σημείου P, μπορείτε να διατυπώσετε κάποια εικασία για τη λύση του προβλήματος;
6. Επαληθεύστε με το κουμπί "max" την εικασία σας.
7. Μπορείτε να αιτιολογήσετε γεωμετρικά την εικασία σας;

Επέκταση δραστηριότητας

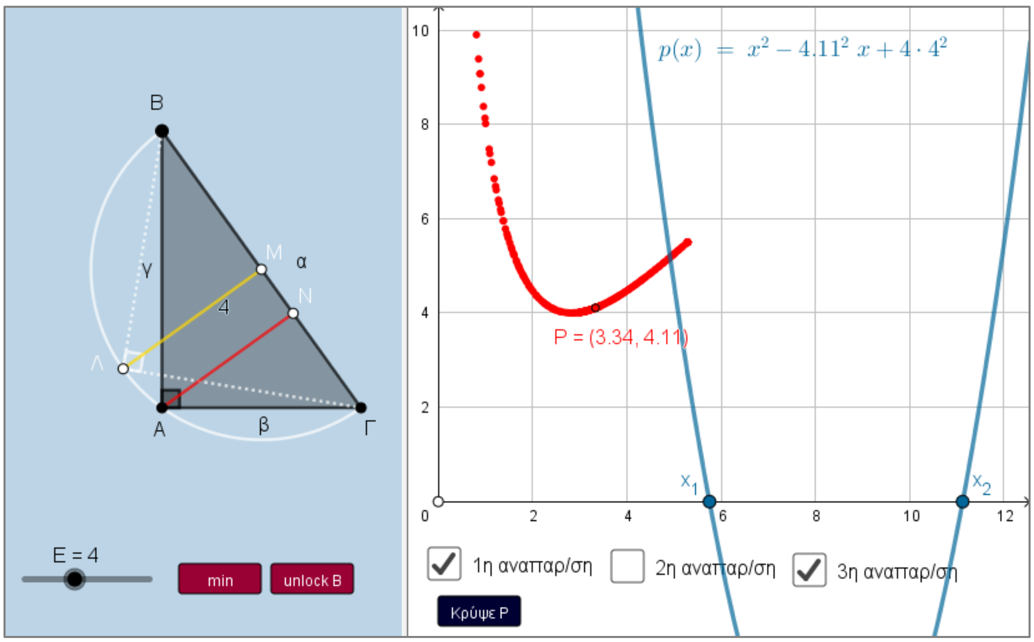
Μεταβάλετε την ακτίνα R του ημικυκλίου.

1. Τί γραμμή φαίνεται τώρα να διαγράφει το σημείο P;
2. Μπορείτε να αιτιολογήσετε την απάντησή σας; (Υπόδ: Πατήστε στο σημείο O και μεταβάλλετε την ακτίνα R. Τι παρατηρείτε;)

Δραστηριότητα 2

Δ2. Σταθερό εμβαδόν – ελάχιστη υποτείνουσα [3]

Από όλα τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ με σταθερό εμβαδόν, να βρεθεί εκείνο που έχει την ελάχιστη υποτείνουσα ή από όλα τα ορθογώνια με σταθερό εμβαδόν, ποιο έχει ελάχιστη διαγώνιο; [4]



https://www.geogebra.org/m/dmat7jcc#material/uxzsfy49

Οδηγίες

Στο δόμημα εμφανίζεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με σταθερό εμβαδόν Ε, το οποίο ρυθμίζεται από το δρομέα Ε. Στο δεξί παράθυρο, εμφανίζεται η γραμμή που διαγράφει ένα σημείο Ρ που έχει συντεταγμένες (γ,α) με γ, α την κάθετη πλευρά και την υποτείνουσα αντίστοιχα του τριγώνου ΑΒΓ.

Προαπαιτούμενες γνώσεις: Εμβαδόν τριγώνου, γραφική παράσταση παραβολής και σχετικές θέσεις με τον άξονα xx΄, μετρικές σχέσεις σε ορθογώνιο τρίγωνο, τύπος υπερβολής ως συνάρτησης.

---

[3] Στη δραστηριότητα επιχειρούμε να αναδείξουμε τη σημασία των πολλαπλών δυναμικών αναπαραστάσεων για τη σχεσιακή κατανόηση στο μαθηματικό συλλογισμό. Συγκεκριμένα, από δυναμικές αναπαραστάσεις με γεωμετρικό περιεχόμενο, νοηματοδοτούνται αλγεβρικές σχέσεις και αντίστροφα: από δ.α με συναρτησιακό ή/και αλγεβρικό περιεχόμενο, νοηματοδοτούνται γεωμετρικές μεταβολές.

[4] Η αλγεβρική αναδιατύπωση του προβλήματος: *Από όλους τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x,y με σταθερό γινόμενο, ποιοι έχουν ελάχιστο άθροισμα τετραγώνων;*

πειραματισμός – εικασία - αιτιολόγηση

1. Σύρετε το σημείο Β σε διάφορες θέσεις. Μπορείτε από το γράφημα του σημείου P να εικάσετε πότε η υποτείνουσα α γίνεται **ελάχιστη**;
2. Επαναλάβατε τον πειραματισμό και για άλλες τιμές του εμβαδού Ε. Πατήστε το κουμπί "min" για να ελέγξετε την εικασία σας.

1η Απόδειξη (ερμηνεία από τη γραφική παράσταση)

3. Έστω x και y οι κάθετες πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ. Συνθέστε ένα σύστημα εξισώσεων με τα x και y που να περιγράφει το πρόβλημα.
4. Αποδείξτε ότι το προηγούμενο σύστημα οδηγεί στην εξίσωση $\omega^2-\alpha^2\omega+4E^2=0$ με το μετασχηματισμό $x^2=\omega\ (\omega\geq 0)$.
5. Πατήστε το διακόπτη "1η αναπαράσταση". Εμφανίζεται η γραφική παράσταση p (παραβολή) του τριωνύμου $p(x)=x^2-\alpha^2x+4E^2$.
6. Πειραματιστείτε με διάφορες θέσεις του σημείου Β. Τί φαίνεται να ισχύει για τις σχετικές θέσεις της παραβολής p με τον άξονα xx΄;
7. Εκφράστε αλγεβρικά τις παρατηρήσεις σας από το προηγούμενο ερώτημα.
8. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την προηγούμενη σχέση για την απόδειξη της εικασίας;

2η απόδειξη (αλγεβρική)

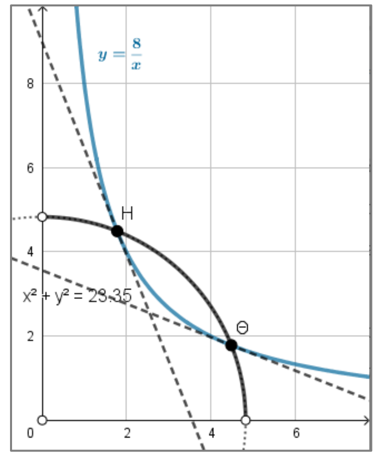
Ισχύει ότι: $\alpha^2=x^2+y^2=x^2+\frac{4E}{x^2}$. Πώς μπορείτε να αξιοποιήσετε αυτή τη σχέση για να αποδείξετε ότι «*από όλα τα ορθογώνια τρίγωνα με σταθερό εμβαδόν, το ισοσκελές έχει την μικρότερη υποτείνουσα».*

3η απόδειξη (Γεωμετρική)

Ανοίξτε το διακόπτη "3η αναπαράσταση". Εμφανίζονται το ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ και το εγγεγραμμένο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΛΓ, όπου Λ το μέσο του τόξου ΒΓ.

1. Ποια σχέση υπάρχει μεταξύ των υψών ΑΝ και ΛΜ;
2. Χρησιμοποιώντας ως δεδομένη τη σχέση: $\beta\gamma=\alpha\upsilon_\alpha$ που ισχύει σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, μπορείτε να αποδείξετε τον ισχυρισμό;

2η Αναπαράσταση (αναλυτική γεωμετρία)



Ανοίξτε το διακόπτη "2η αναπαράσταση". Εμφανίζονται οι γραφικές παραστάσεις του κύκλου: $x^2 + y^2 = \alpha^2, x > 0, y > 0$ και της υπερβολής καθώς και οι εφαπτομένες της υπερβολής στα σημεία της Η και Θ.

1. Σύρετε το σημείο Β σε διάφορες θέσεις.
2. Τί παρατηρείτε για τις σχετικές θέσεις των δύο κωνικών τομών;
3. Τί φαίνεται να ισχύει με τη σχετική θέση τους, όταν η υποτείνουσα α γίνει ελάχιστη;
4. Μπορείτε να εικάσετε από το προηγούμενο ερώτημα, *“πότε δύο κωνικές τομές θα λέμε ότι εφάπτονται σε κάποιο κοινό τους σημείο”*;

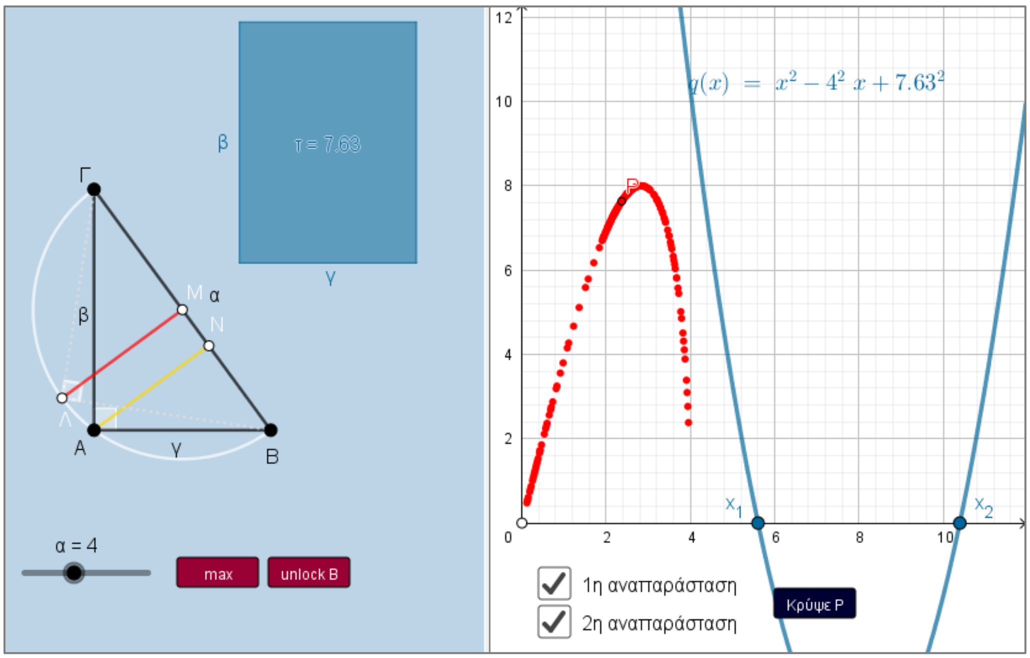
και κάτι τελευταίο...

Από το δόμημα φαίνεται ότι το σημείο Ρ "κινείται" επάνω στην υπερβολή από κάποιο σημείο και πριν. Μπορείτε να ελέγξετε αν αυτός ο ισχυρισμός είναι πραγματικός; (θα χρειαστεί να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης στην οποία κινείται το σημείο Ρ).

Δραστηριότητα 3

Δ3. Σταθερή υποτείνουσα - μέγιστο ορθογώνιο

Στη δραστηριότητα που ακολουθεί εξετάζουμε το πρόβλημα: *"Από όλα τα ορθογώνια τρίγωνα με σταθερή υποτείνουσα α, ποιο έχει το μέγιστο εμβαδόν"* (με γεωμετρική διατύπωση) ή *"από όλους τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς με σταθερό άθροισμα τετραγώνων, ποιοι έχουν το μέγιστο γινόμενο"* (με αλγεβρική διατύπωση).



https://www.geogebra.org/m/dmat7jcc#material/xwfuggzx

Οδηγίες

Στο 1ο παράθυρο, εμφανίζεται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες πλευρές β και γ, ένας δρομέας α που ορίζει το μήκος της υποτείνουσας και ένα ορθογώνιο με πλευρές β και γ. Στο 2ο παράθυρο, εμφανίζεται ένα σημείο P με συντεταγμένες (γ, βγ)

Προαπαιτούμενες γνώσεις: Εμβαδόν τριγώνου και ορθογωνίου, γραφική παράσταση παραβολής και σχετικές θέσεις με τον άξονα xx΄, μετρική σχέση σε ορθογώνια τρίγωνα $\beta\gamma = \alpha\upsilon_\alpha$.

πειραματισμός – εικασία - αιτιολόγηση

1. Αρχικά διατυπώστε συμβολικά το πρόβλημα με χρήση των πλευρών α, β και γ.

2. Τί εκφράζει το γινόμενο βγ για το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και το ορθογώνιο τ;
3. Σύρετε το σημείο Β σε διάφορες θέσεις και παρατηρήστε την καμπύλη που διαγράφει το σημείο Ρ.
4. Από τη μορφή της καμπύλης του σημείου Ρ, μπορείτε να εικάσετε αν και πότε το γινόμενο λαμβάνει μέγιστη τιμή;
5. Πατήστε το κουμπί "max" για να συγκρίνετε τα ευρήματά σας.
6. Τί φαίνεται να ισχύει τότε για το ορθογώνιο τ;
7. Ποια εικασία μπορούμε να διατυπώσουμε σχετικά με το αρχικό μας ερώτημα;

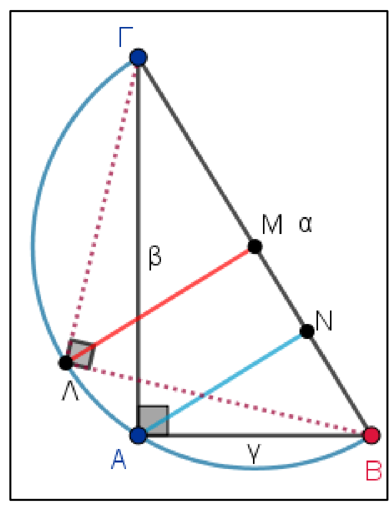
1η Απόδειξη (ερμηνεία από τη γραφική παράσταση)

Αν με x και y συμβολίσουμε τις κάθετες πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, τότε:

1. Δημιουργήστε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με αγνώστους τα x και y που περιγράφουν το πρόβλημα.
2. Αποδείξτε ότι το προηγούμενο σύστημα οδηγεί στην εξίσωση 2^{ου} βαθμού της μορφής $\omega^2-\alpha^2\omega+\tau^2=0$ όπου $x^2=\omega, \omega\geq 0$.
3. Σύρετε το σημείο Β σε διάφορες θέσεις.
4. Τί παρατηρείτε για τις σχετικές θέσεις της παραβολής q με τον άξονα xx΄ ;
5. Αξιοποιήστε το συμπέρασμα που προκύπτει από την προηγούμενη παρατήρηση για να συντάξετε την απόδειξη της εικασίας σας.

Γεωμετρική Απόδειξη

Ανοίξτε το διακόπτη «2^{η} Αναπαράσταση». Εμφανίζεται το ημικύκλιο διαμέτρου ΒΓ και το εγγεγραμμένο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΛΓ εντός αυτού, όπου ΛΜ είναι **μεσοκάθετος** της ΒΓ και το ΑΝ ύψος του τριγώνου ΑΒΓ.
Σύρετε το σημείο Β σε διάφορες θέσεις.



1. Τί παρατηρείτε για τη σχέση των τμημάτων ΑΝ και ΛΜ;
2. Χρησιμοποιώντας ως γνωστή τη σχέση που ισχύει σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο: $\beta\gamma=\alpha\upsilon_\alpha$ να αξιοποιήσετε αυτά τα στοιχεία για την απόδειξη της εικασίας σας.

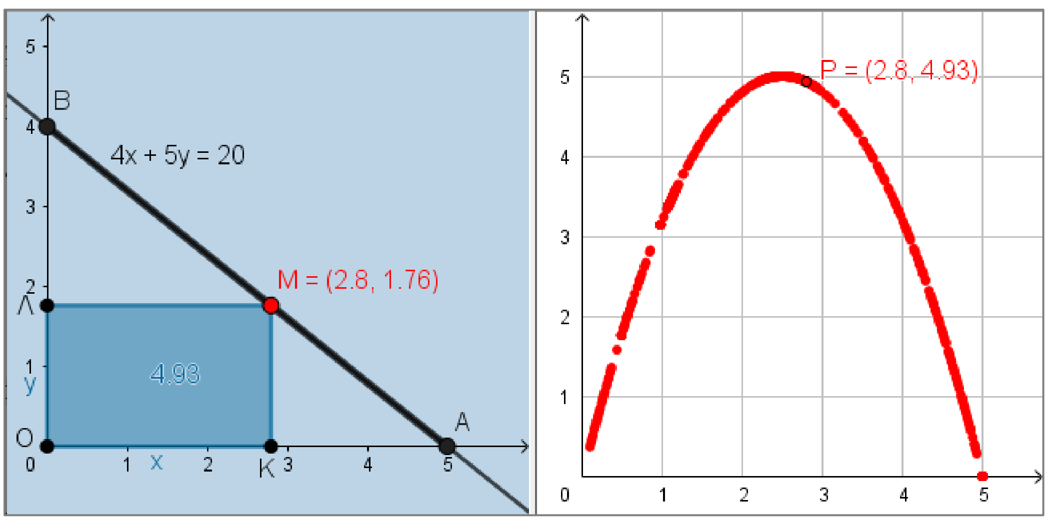
Επέκταση δραστηριότητας

Η γραμμή που διαγράφει το σημείο P(γ,βγ), "φαίνεται" να ομοιάζει με **παραβολή**. Μπορείτε να ελέγξετε αν πρόκειται πράγματι για παραβολή; *(Θα χρειαστεί να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης που περιγράφει τη συμμεταβολή της μεταβλητής τ=βγ συναρτήσει της πλευράς γ)*

Δραστηριότητα 4

Δ4. Μέγιστο εμβαδόν εγγεγραμμένου ορθογωνίου

Στη δραστηριότητα που ακολουθεί εξετάζουμε το πρόβλημα: "Από όλα τα ορθογώνια που είναι εγγρεγραμμένα σε ορθογώνιο τρίγωνο, ποιο έχει το μέγιστο εμβαδόν". Με αλγεβρική διατύπωση εξετάζουμε το πρόβλημα : *«Αν δύο μεταβλητές x και y πολλαπλασιαζόμενες με σταθερούς και θετικούς συντελεστές α και β έχουν σταθερό άθροισμα, το γινόμενό τους μεγιστοποιείται αν και μόνο αν οι ποσότητες αυτές γίνουν* ***αντιστρόφως ανάλογες*** *προς τους συντελεστές τους».*



https://www.geogebra.org/m/dmat7jcc#material/dr7a3nen

Οδηγίες

Στο δόμημα εμφανίζεται το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ και ένα ορθογώνιο ΟΚΜΛ που είναι εγγεγραμμένο σε αυτό. Η υποτείνουσα ΑΒ, είναι τμήμα της ευθείας με τύπο: $\alpha x+\beta y=\gamma,\ \alpha\beta\neq 0$

Στο 2ο παράθυρο εμφανίζεται το σημείο P που έχει συντεταγμένες (x_M,E) όπου x_M η τετμημένη του σημείου M και E, το εμβαδόν του ορθογωνίου.

Προαπαιτούμενες γνώσεις: Εμβαδόν ορθογωνίου, γραφική παράσταση παραβολής, τετμημένη κορυφής παραβολής

πειραματισμός – εικασία - αιτιολόγηση

Πειραματισμός (ΟΑΒ: ισοσκελές)

Μετακινήστε το σημείο Α ή το σημείο Β ώστε το τρίγωνο ΟΑΒ να είναι ισοσκελές. Πειραματιστείτε για διάφορες θέσεις του σημείου Μ στην υποτείνουσα ΑΒ.

1. Από τη μορφή της καμπύλης που διαγράφει το σημείο Ρ, μπορείτε να εικάσετε πότε το εμβαδόν Ε μεγιστοποιείται; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Πειραματισμός (ΟΑΒ: μη ισοσκελές)

2. Επαναλάβατε τον πειραματισμό για διάφορες θέσεις του σημείου Μ στην υποτείνουσα ΑΒ.
3. Εξετάστε αν ισχύει η ίδια εικασία που διατυπώσατε προηγουμένως.
4. Τί μορφή καμπύλης διαγράφει το σημείο Ρ;
5. Μπορείτε να αιτιολογήσετε την απάντησή σας;
6. Χρησιμοποιώντας τον τύπο εύρεσης της τετμημένης της κορυφής μιας παραβολής, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου ΟΚΜΛ είναι μέγιστο αν και μόνο αν ισχύει ότι: $\frac{x}{\beta}=\frac{y}{\alpha}$ (υποθέτουμε ότι το σημείο Μ(x,y) κινείται σε τμήμα της ευθείας με εξίσωση $\alpha x+\beta y=\gamma$ όπως αυτό που φαίνεται στο δόμημα).
7. **Ισχυρισμός**: *Όταν το εμβαδόν του ορθογωνίου ΟΚΜΛ μεγιστοποιείται, το σημείο Μ είναι μέσον της υποτείνουσας ΑΒ.* Να εξετάσετε αν ο ισχυρισμός είναι αληθής.
8. Να αναφέρετε έναν τρόπο κατασκευής του εγγεγραμμένου ορθογωνίου με το μέγιστο εμβαδόν.
9. Αν ΑΒΓ είναι ένα τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ, να κατασκευαστεί εγγεγραμμένο ορθογώνιο εντός αυτού, με μία πλευρά να βρίσκεται σε μία πλευρά του τριγώνου, ώστε να έχει το μέγιστο εμβαδόν.

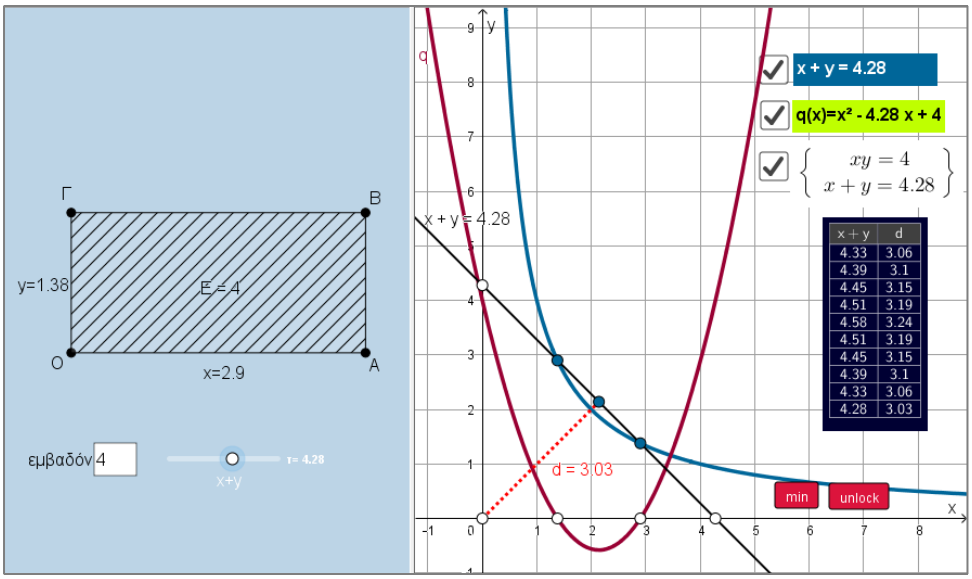
Δραστηριότητα 5

Δ5. Σταθερό εμβαδόν - ελάχιστη περίμετρος - I

Στη δραστηριότητα που ακολουθεί εξετάζουμε το εξής πρόβλημα:

Γεωμετρική διατύπωση: *"Από όλα τα ορθογώνια με σταθερό εμβαδόν, ποιο έχει την ελάχιστη περίμετρο;"*

Αλγεβρική διατύπωση: *"Από όλους τους πραγματικούς αριθμούς x και y με σταθερό γινόμενο, ποιοι έχουν το ελάχιστο άθροισμα;"*



https://www.geogebra.org/m/dmat7jcc#material/nhbjmrv9

Οδηγίες

Στο δόμημα εμφανίζονται αρχικά:

- *στο αριστερό παράθυρο:* ένας δρομέας από τον οποίο μεταβάλλεται η ημιπερίμετρος x+y=τ του ορθογωνίου. Το εμβαδόν παίρνει τιμές από το διάστημα [0,5] και μπορεί να αλλάζει δίνοντας τιμές στο αντίστοιχο κουτί.
- *στο δεξί παράθυρο*: εμφανίζεται η γραφική παράσταση της ευθείας x+y=τ, όπου τ η ημιπερίμετρος του ορθογωνίου. Επίσης εμφανίζεται η απόσταση d της αρχής των αξόνων από αυτή την ευθεία. Τέλος, ένας πίνακας τιμών που αφορά στη συμμεταβολή του d ως προς το τ.

Προαπαιτούμενες γνώσεις: Εμβαδόν ορθογωνίου, γραφική παράσταση παραβολής, τετμημένη κορυφής παραβολής

πειραματισμός – εικασία - αιτιολόγηση

1ο στάδιο (διατύπωση εικασίας)

Πειραματιστείτε για διάφορες τιμές του δρομέα "x+y=τ" και παρατηρήστε τον πίνακα τιμών (x+y,d).

1. Από τον πειραματισμό σας, προκύπτει ότι υπάρχει **ελάχιστη** τιμή της παράστασης x+y;
2. Αν ναι, πότε συμβαίνει αυτό; Ειδικότερα: Τί σχήμα φαίνεται να έχει το ορθογώνιο ΟΑΒΓ;
3. Πώς φαίνεται να συνδέεται η απόσταση d της αρχής των αξόνων από την ευθεία x+y=τ με το κεντρικό μας ερώτημα;
4. Με βάση τα προηγούμενα ερωτήματα, διατυπώστε μια εικασία για το αρχικό ερώτημα.

Με βάση τα δεδομένα και τα ζητούμενα, το πρόβλημα μοντελοποιείται με το επόμενο σύστημα:
{x+y=τ και xy=E}.

5. Να αποδείξετε ότι το προηγούμενο σύστημα οδηγεί στην εξίσωση: $x^2 - \tau x + E = 0$

   Ανοίξτε το διακόπτη "*q(x)*". Η παραβολή που εικονίζεται αφορά στη γραφική παράσταση του τριωνύμου $q(x) = x^2 - \tau x + E$ που προκύπτει από το προηγούμενο σύστημα.
6. Πειραματιστείτε για διάφορες τιμές του τ. Τί φαίνεται να ισχύει για τις σχετικές θέσεις της παραβολής q(x) με τον άξονα xx΄;
7. Πώς ερμηνεύεται αλγεβρικά το προηγούμενο;
8. Αξιοποιήστε τα προηγούμενα για να αποδείξετε την εικασία σας στα προηγούμενα.

Επέκταση δραστηριότητας

Ανοίξτε το διακόπτη "*Σύστημα*". Εμφανίζεται η ευθεία x+y=τ και η γραφική παράσταση της υπερβολής .

1. Πειραματιστείτε για διάφορες τιμές του τ. Τί φαίνεται να ισχύει για τις σχετικές θέσεις της ευθείας και της υπερβολής;
2. Τί συμβαίνει στην περίπτωση που ελαχιστοποιείται το τ;
3. Τί θα μπορούσαμε να ορίσουμε ως "***απόσταση ενός σημείου από μία υπερβολή ή γενικότερα από μία κωνική τομή***";

Δραστηριότητα 6

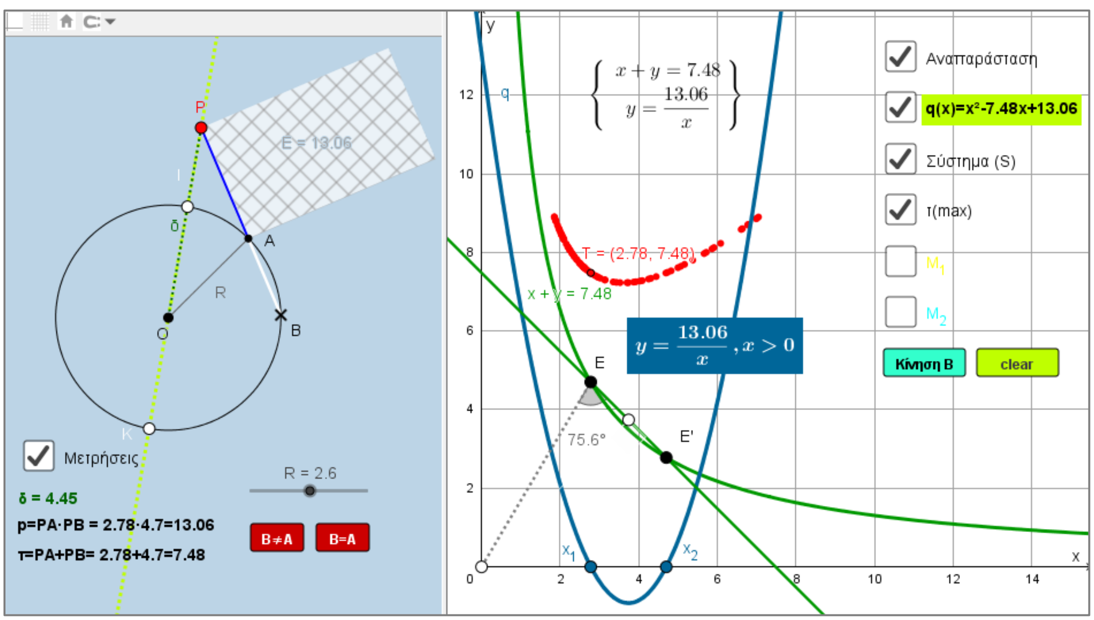
Δ6. Σταθερό εμβαδόν - ελάχιστη περίμετρος – ΙΙ-

Εισαγωγή

Δύναμη Σημείου ως προς Κύκλο: ένας αθέατος κόσμος συμμεταβολών

Είναι γνωστό ότι οι μαθητές έχουν αποσπασματικές εικόνες για τις μετρικές σχέσεις που συναντούν στην Ευκλείδεια Γεωμετρία της **Β΄ Λυκείου**, σε σχέση με το αλγεβρικό – συναρτησιακό περιεχόμενο που αυτές εμπεριέχουν. Με άλλα λόγια: Η Άλγεβρα και η Γεωμετρία λειτουργούν στο σχολικό περιβάλλον ως *ερμητικά κλειστοί και αποστασιοποιημένοι χώροι ο ένας ως προς τον άλλον*.

Στη δραστηριότητα επιχειρούμε, στο ενοποιημένο περιβάλλον του λογισμικού Geogebra, να αναδείξουμε αυτή την αλληλεξάρτηση, μέσω διάφορων συμμεταβολών που δημιουργούνται από τη "δύναμη σημείου ως προς κύκλο". Επιπλέον, επιδιώκουμε μέσω της δραστηριότητας, οι μαθητές να διαπιστώνουν και να ερμηνεύουν αλγεβρικά τις εμφανιζόμενες γεωμετρικές ιδιότητες και αντίστροφα, να εξετάζουν μέσω γεωμετρικών ιδιοτήτων τα αναμενόμενα αλγεβρικά ισοδύναμα τους.

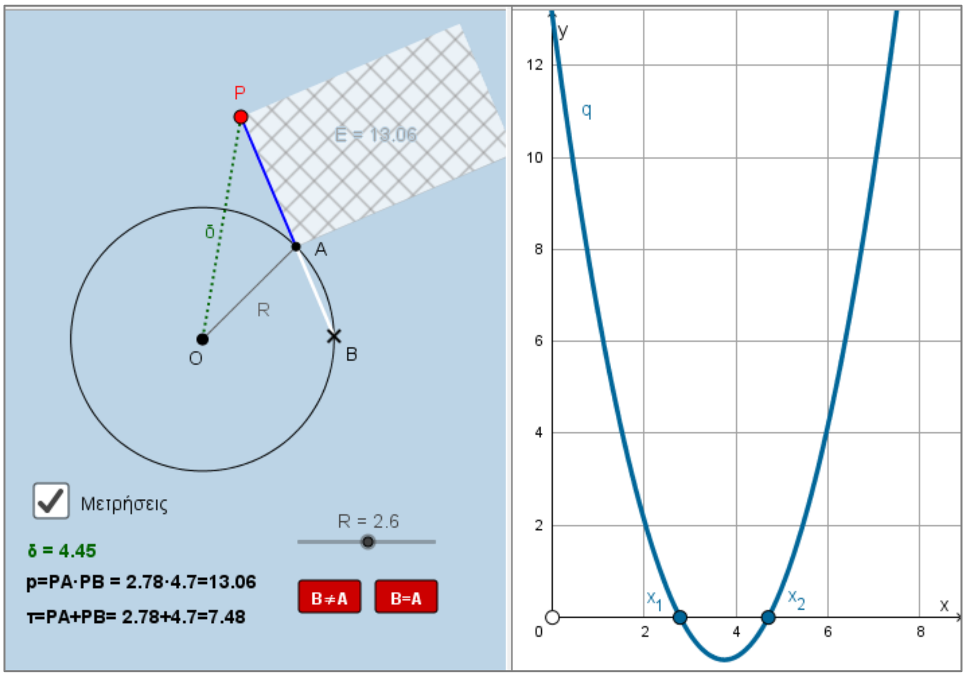


Σχόλιο: *Σημειώνουμε ότι η συγκεκριμένη ενότητα με τη σημασία της "δύναμης σημείου ως προς κύκλο" είναι πλέον εκτός ύλης(..). Η δραστηριότητα προτείνεται να διδαχθεί στις ώρες προσανατολισμού στο πλαίσιο των κωνικών τομών. Προσφέρεται για μια ενοποιημένη θεώρηση θεμάτων που αφορούν στην Ευκλείδεια, Αναλυτική Γεωμετρία καθώς και στην Άλγεβρα.*

Οδηγίες

Στη δραστηριότητα υπάρχουν:

Ένα σημείο P, ένας κύκλος (O,R) που η ακτίνα του μεταβάλλεται από το δρομέα R η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία P, A και B. Επίσης, υπάρχουν οι μετρήσεις για το γινόμενο $p = PA \cdot PB$, το άθροισμα $\tau = PA + PB$ και την απόσταση δ του σημείου P από το κέντρο του κύκλου.[5]



https://www.geogebra.org/m/dmat7jcc#material/mab5bdmf

Προαπαιτούμενες γνώσεις: Πυθαγόρειο Θεώρημα, απόσταση σημείου από κύκλο, γραφική παράσταση παραβολής και σχετικές θέσεις της με τον άξονα xx΄, σχετικές θέσεις ευθείας με κωνική τομή..

πειραματισμός – εικασία - αιτιολόγηση

1ο στάδιο (ελαχιστοποίηση περιμέτρου)

1.1 Μετακινήστε το σημείο B στην περιφέρεια του κύκλου. Τι παρατηρείτε για την τιμή του γινομένου $p = PA \cdot PB$;

1.2 Προσπαθήστε να εντοπίσετε τις παραμέτρους που καθορίζουν τις τιμές του γινομένου p.

1.3 Πλησιάστε τώρα πολύ κοντά τα σημεία A και B. Τι φαίνεται να ισχύει για τη σχετική θέση της ευθείας PAB και του κύκλου;

---

[5] Για τη δημιουργία ενός μοντέλου, θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι η όλη διάταξη είναι αναπαράσταση ενός γεωργικού ποτιστικού μηχανισμού και να προσαρμόσουμε στη συνέχεια κατάλληλα ερωτήματα σε κάποιο αντίστοιχο σενάριο.

1.4 Πώς μπορείτε να αξιοποιήσετε την προηγούμενη παρατήρηση ώστε να βρείτε τον τύπο που υπολογίζει την τιμή του γινομένου p.

1.5 I. Επαναλάβετε τα βήματα 1 & 2 όταν το σημείο P είναι μέσα στον κύκλο. Ισχύουν τώρα ανάλογα συμπεράσματα με τα βήματα 1 & 2; ☐ Ναι ☐ Όχι

II. Προσπαθήστε να δώσετε τώρα τον τύπο που δίνει την τιμή του γινομένου p.

1.6 Βρείτε ένα γεωμετρικό μέγεθος που να περιγράφει το γινόμενο p [6].

1.7 Με το σημείο P να είναι εξωτερικό του κύκλου, ανοίξτε το διακόπτη [**Αναπαράσταση**]. Εμφανίζεται ένα ορθογώνιο Ε με πλευρές PA και PB και η μέτρηση τ = PA+PB της ημιπεριμέτρου του.

I. Πειραματιστείτε για διάφορες θέσεις του σημείου B στον κύκλο (O,R) και παρατηρήστε τις τιμές της ημιπεριμέτρου τ.

II. Αλλάξτε διαδοχικά την ακτίνα R του κύκλου (O,R) και την απόσταση δ και επαναλάβετε τον πειραματισμό. Τί φαίνεται να ισχύει για την περίπτωση που το B τείνει να ταυτιστεί με το A;

1.8 Τι σχήμα φαίνεται να αποκτά το ορθογώνιο όταν το A τείνει να ταυτιστεί με το B; Δικαιολογήστε την απάντηση σας.

1.9 Διατυπώστε την εικασία σας σχετικά με το ερώτημα «από όλα τα ορθογώνια με σταθερό εμβαδόν ποιο έχει την ελάχιστη περίμετρο»;

2ο στάδιο (γραφική αναπαράσταση – απόδειξη ισχυρισμού)

2.1 I. Αν θέσουμε PA=x και PB=y, γράψτε ένα σύστημα (Σ) δύο εξισώσεων με αγνώστους τα x και y που να περιγράφει τα μεγέθη p και τ.

2.2 II. Να δείξετε ότι το σύστημα (Σ) οδηγεί στην εξίσωση 2ου βαθμού: $x^2 - \tau x + p = 0$

2.3 Ανοίξτε το διακόπτη [q(x)]: Εμφανίζεται η γραφική παράσταση της παραβολής: $q(x) = x^2 - \tau x + p$. Πειραματιστείτε για διάφορες τιμές των R και δ, καθώς και για διάφορες θέσεις του σημείου B. Ποιο συμπέρασμα προκύπτει για τη σχετική θέση της παραβολής με τον άξονα xx΄;

2.4 Πώς μεταφράζεται αυτό αλγεβρικά;

2.5 Με βάση τις προηγούμενες παρατηρήσεις σας να αποδείξετε τον ισχυρισμό που διατυπώσατε στην 1.9 ερώτηση.

[6] Το ορθογώνιο με πλευρές PA και PB, θα μπορούσε να είναι κάποιο πρόσθετο εξάρτημα στο ποτιστικό μηχάνημα που προαναφέρθηκε.

Σημείωση:

Σχετικά με την ακολουθούμενη διαδικασία στο 2ο στάδιο για την απόδειξη ελαχιστοποίησης της περιμέτρου ενός ορθογωνίου με σταθερό εμβαδόν, επισημαίνουμε ότι ασφαλώς και υπάρχουν πιο σύντομοι τρόποι απόδειξης.

Για παράδειγμα αναφέρουμε:

- Το τριώνυμο $q(x)=x^2-\tau x+p$ θα πρέπει απαραίτητα να έχει μη αρνητική διακρίνουσα, αφού το x εκφράζει τη διάσταση ενός κατασκευασμένου ορθογωνίου. Σε αυτή την περίπτωση, προκύπτει άμεσα η αποδεικτέα σχέση.

Εναλλακτικά:

- Ισχύει ότι: $(x+y)^2=(x-y)^2+4xy=(x-y)^2+4p\geq 4p$

  Επομένως, προκύπτει ότι $x+y=\min \Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y$, από την οποία προκύπτει ότι το **τετράγωνο** έχει την ελάχιστη περίμετρο.

Σχετικά με προσεγγίσεις όπως αυτές που προαναφέρθηκαν, σημειώνουμε ότι ερευνητικά, έχει καταγραφεί ότι και στις δύο περιπτώσεις δεν προκαλούνται συνθήκες αυτενέργειας των μαθητών (πολύ περισσότερο περιβάλλοντα ομαδοσυνεργατικής μάθησης με κονστρουκτιβιστικά χαρακτηριστικά). [7]

Επιπλέον: Η διαδικασία που προτείνεται στο 2ο στάδιο, έχει ως βασική επιδίωξη την **ερμηνεία** από τους μαθητές, των δυναμικών αναπαραστάσεων του ψηφιακού δομήματος, από το αλγεβρικό στο γεωμετρικό ισοδύναμό τους και αντίστροφα.

Σε κάθε περίπτωση προκύπτει ερευνητικά ότι, προσεγγίσεις όπως αυτές που προτείνονται στο παρόν φύλλο εργασίας, μειώνουν τις πεποιθήσεις των μαθητών για *την αυθεντία του διδάσκοντα* και αυξάνουν το ποσοστό των μαθητών που αναγνωρίζουν τη σημασία της διδασκαλίας των Μαθηματικών

3ο στάδιο (γραφική αναπαράσταση των εξισώσεων του συστήματος (Σ)).

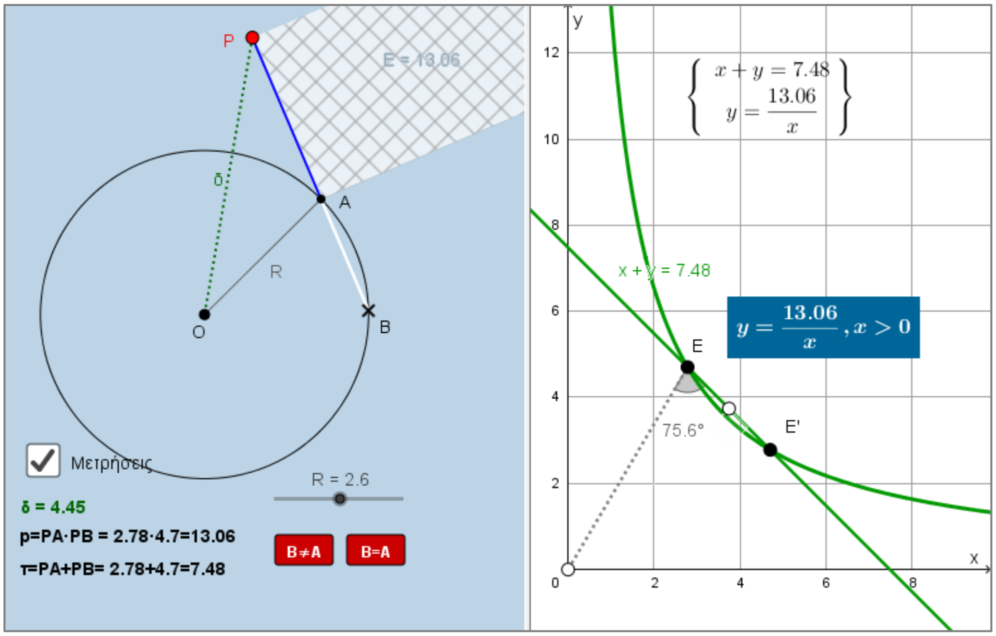
3.1 Τί παριστάνουν οι εξισώσεις του συστήματος (Σ) σε ένα σύστημα συντεταγμένων xOy;

3.2 Πλησιάστε αρκούντως κοντά τα σημεία Α και Β.

I. Τι φαίνεται να ισχύει για τη σχετική θέση των γραμμών που περιγράψατε στο προηγούμενο ερώτημα;

II. Τι φαίνεται να ισχύει για τη γωνία $O\hat{E}Z$; Να αιτιολογήσετε τον ισχυρισμό σας.

[7] Από την άλλη «..φαίνεται να αγνοείται ότι η αξιοπιστία δεν προέρχεται, πρωτίστως, από αυστηρούς ελέγχους ορθότητας τυπικών ισχυρισμών, αλλά από προσεκτική σκέψη και κριτική θεώρηση των μαθηματικών ιδεών. (W. Thurston, 1994)
«Τα μαθηματικά γενικά και ειδικά η απόδειξη, παρουσιάζονται σαν ένα τελειωμένο προϊόν. Ο μαθητής δεν είναι συμμέτοχος στην κατασκευή της γνώσης αλλά περισσότερο ένας παθητικός δέκτης της.» (Alibert&Thomas, 1991)



4ο στάδιο (μεγιστοποίηση του γινομένου p)

4.1 Όταν το σημείο P είναι εξωτερικό του κύκλου, ανοίξτε το διακόπτη [τ(max)] και δώστε κίνηση στο σημείο B (διακόπτης [κίνηση B]).

Εμφανίζεται το ίχνος του σημείου T που έχει συντεταγμένες $(x, x+\frac{p}{x})$ όπου $x=PA$ και $p=PA\cdot PB$ και επομένως $x+\frac{p}{x}=PA+PB$. Έχει ακρότατα αυτή η συνάρτηση; Αν ναι, τι είδους ακρότατα έχει και σε ποιες θέσεις του σημείου B εμφανίζονται;

4.2 Να αιτιολογήσετε αλγεβρικά τα ευρήματά σας.

5ο στάδιο (κρυμμένες συμμεταβολές)

5.1 Ορίζουμε το σημείο M_1 με συντεταγμένες $(\delta, f(\delta))$ με $f(\delta)=\delta^2-R^2$ ([8]) (διακόπτης M_1). Πειραματιστείτε για διάφορες θέσεις του σημείου P και παρατηρήστε τη γραμμή που διαγράφουν τα ίχνη του σημείου M_1. Ποιο τμήμα γνωστής γραφικής παράστασης, φαίνεται να είναι αυτή η γραμμή; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

---

[8] Η παράσταση δ^2-R^2 καλείται **δύναμη του σημείου P ως προς τον κύκλο (O,R)** και συμβολίζεται με: $\mathcal{D}^{P}_{(O,R)}$

5.2 Εξετάστε για ποιες θέσεις του σημείου P συμβαίνουν οι περιπτώσεις: $f(\delta)>0$, $f(\delta)=0$ και $f(\delta)<0$. Βρείτε στο σχολικό σας βιβλίο Γεωμετρίας σχετικό εδάφιο που να δικαιολογεί γεωμετρικά, τα ευρήματα σας.

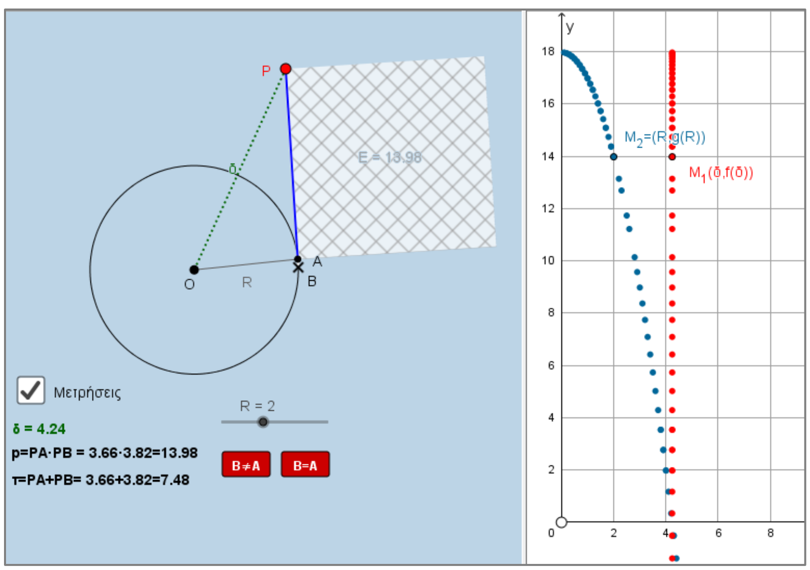
5.3 Κλείστε το διακόπτη M_1. Ορίζουμε τώρα το σημείο M_2 με συντεταγμένες $(R, g(R))$ όπου $g(R)=\delta^2-R^2$. Πειραματιστείτε για διάφορες τιμές του R (διακόπτης → Μεταβολή R) και παρατηρήστε τη γραμμή που διαγράφουν τώρα τα ίχνη του σημείου M_2. Ποιο τμήμα γνωστής γραφικής παράστασης, φαίνεται να είναι αυτή η γραμμή; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

5.4 Εξετάστε τα σημεία της ερώτησης 5.2 και για την περίπτωση του σημείου M_2.

5.5 Με ανοικτό το διακόπτη M_2 ανοίξτε και το διακόπτη M_1 και δώστε πάλι [Μεταβολή του R].

- Τι παρατηρείτε τώρα για τη γραμμή που διαγράφουν τα ίχνη του σημείου M_1;
- Είναι γραφική παράσταση συνάρτησης;
- Πού οφείλεται αυτή η αλλαγή σε σχέση με την 1η Ερώτηση;

5.6 Επαναλάβετε τον προηγούμενο πειραματισμό μεταβάλλοντας το δ. Τι παρατηρείτε για τη γραμμή που διαγράφει τώρα το σημείο M_2; Πού οφείλεται αυτή η αλλαγή σε σχέση με την 3η ερώτηση;



ένας αθέατος κόσμος συμμεταβολών…

Δραστηριότητα 7

Δ7. Χρυσή τομή

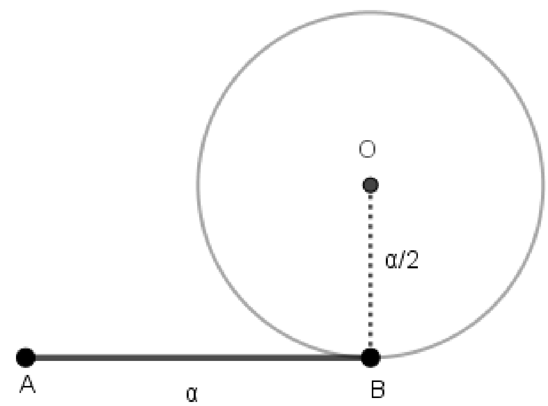
1ο στάδιο: Διαίρεση ευθ. τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο [9]

Αν ΑΒ είναι ένα τμήμα, τότε να βρεθεί σημείο Γ εντός αυτού, ώστε το μεγαλύτερο τμήμα να είναι **μέση ανάλογος** του μικρότερου τμήματος και του αρχικού.

Προαπαιτούμενες γνώσεις: Σταθερό γινόμενο τμημάτων από σημείο εκτός κύκλου.

Έστω $AB=\alpha, A\Gamma=x$ το ζητούμενο τμήμα. Θα πρέπει να ισχύει: $\frac{x}{\alpha}=\frac{\alpha-x}{x} \Leftrightarrow x(x+\alpha)=\alpha^2$

1.1 Κατασκευάζουμε τον κύκλο $(O,\frac{\alpha}{2})$ που εφάπτεται του τμήματος ΑΒ στο σημείο Β.



https://www.geogebra.org/m/dmat7jcc#material/mab5bdmf

1.2 Να ολοκληρώσετε την κατασκευή.

Συμπέρασμα:

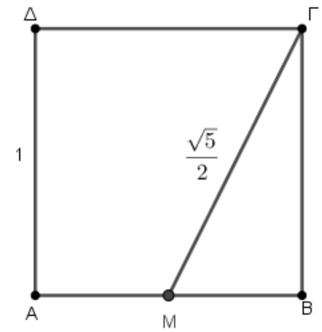
Η θετική ρίζα της εξίσωσης $x(x+\alpha)=\alpha^2$ είναι: $x=\frac{\alpha(\sqrt{5}-1)}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{x}=\frac{x}{\alpha-x}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cong 1{,}618$.

Η συγκεκριμένη αναλογία εκφράζει το λόγο της **χρυσής τομής** και συμβολίζεται διεθνώς με το γράμμα **φ**.

[9] Στα στοιχεία του Ευκλείδη συναντάμε για 1η φορά τη διαίρεση ενός ευθ. τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο (Βιβλίο ΙΙ- Η πρόταση 11 είναι η διαίρεση ενός ευθυγράμμου τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο, δηλαδή είναι η κατασκευή της Χρυσής Τομής).
Στο συγκεκριμένο βιβλίο συναντάμε επίσης τις απαρχές της Γεωμετρικής Άλγεβρας με τη γενίκευση του Πυθαγορείου Θεωρήματος καθώς και τον τετραγωνισμό ευθ. σχήματος).

2ο στάδιο: Χρυσό ορθογώνιο – Κατασκευή

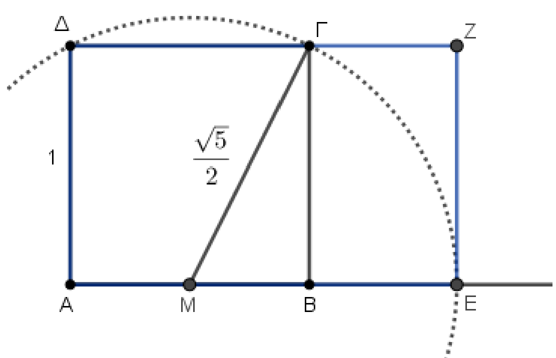
Στα επόμενα περιγράφουμε την κατασκευή και τις ιδιότητες ενός **χρυσού ορθογωνίου**. Δηλαδή ενός ορθογωνίου του οποίου οι πλευρές έχουν *λόγο ίσο με τη χρυσή αναλογία* $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.



2.1 Κατασκευάζουμε τετράγωνο πλευράς 1 και θεωρούμε το μέσο Μ της πλευράς ΑΒ. Τότε φανερά θα είναι: $M\Gamma = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

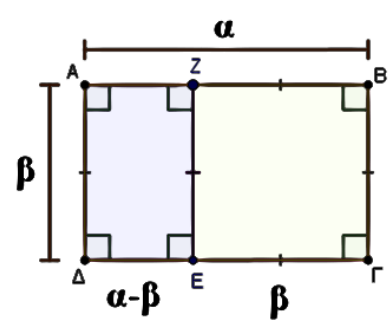
2.2 Μπορείτε να συνεχίσετε την κατασκευή αυτή;

2.3 Το ορθογώνιο ΑΕΖΔ είναι χρυσό. Να αιτιολογήσετε την κατασκευή που φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



2.4 Το ορθογώνιο του επόμενου σχήματος είναι χρυσό. Δηλαδή ισχύει ότι: $\frac{\alpha}{\beta} = \phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Αν το ορθογώνιο χωριστεί σε ένα τετράγωνο ΒΖΕΓ και ένα ορθογώνιο ΑΖΕΔ, τότε το μικρό ορθογώνιο θα είναι όμοιο με το αρχικό[10]. Να αιτιολογήσετε γιατί θα ισχύει αυτό.

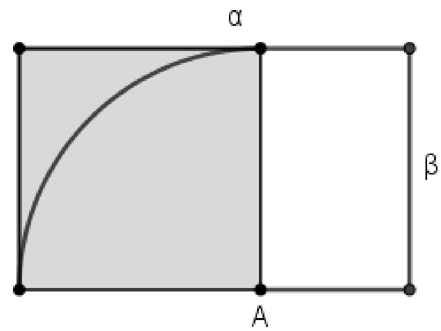


2.5 Τι είδους ορθογώνιο θα είναι το ΑΖΕΔ;

[10] Δύο ορθογώνια είναι όμοια αν οι πλευρές τους είναι ανάλογες.

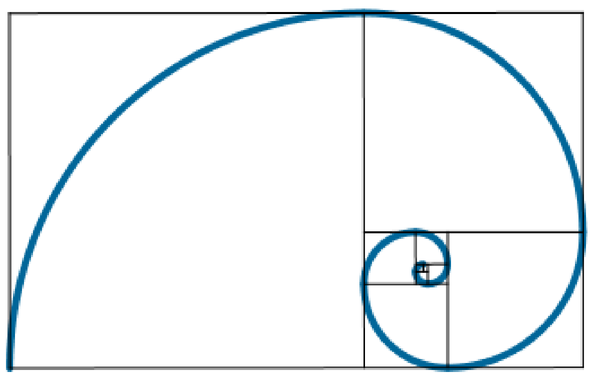
3ο στάδιο: Χρυσή σπείρα– Κατασκευή [11]

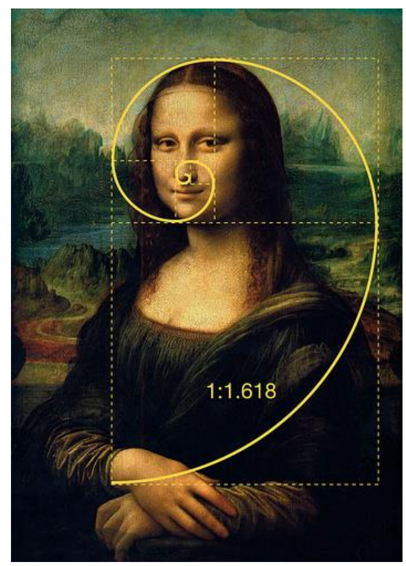
Το ορθογώνιο με διαστάσεις α και β είναι χρυσό. Το χωρίζουμε σε ένα τετράγωνο και ένα ορθογώνιο το οποίο είναι όμοιο με το αρχικό όπως περιγράφηκε στην προηγούμενη παράγραφο.



3.1 Με ποιον τρόπο κατασκευάστηκε το εικονιζόμενο τόξο;

3.2 Περιγράψτε την επαγωγική διαδικασία με βάση την οποία κατασκευάζεται **η χρυσή σπείρα**.



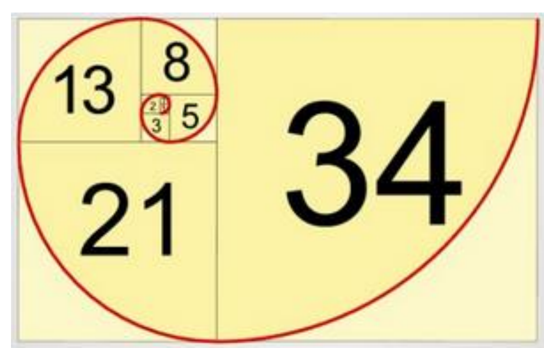


4ο στάδιο: Ακολουθία Fibonacci

Η συγκεκριμένη ακολουθία ορίζεται με βάση τον αναδρομικό τύπο:

«Κάθε όρος αυτής της ακολουθίας, από τον 3ο και μετά ορίζεται ως το άθροισμα των δύο προηγούμενων».

Με άλλα λόγια πρόκειται για την ακολουθία των όρων: {1,1,2,3,5,8,13,21,34,…}.



4.1 Πώς συνδέεται η ακολουθία Fibonacci με τα τετράγωνα του σχήματος;

4.2 Ανοίξτε την εφαρμογή Δ.6 στη διεύθυνση (https://www.geogebra.org/m/mab5bdmf).

[11] Η χρυσή σπείρα παρατηρείται σε ένα μεγάλο πλήθος σχηματισμών στη φύση (άνθη, όστρακα κ.λ.π), στην αρχιτεκτονική (Παρθενώνας) αλλά και σε έργα τέχνης (ζωγραφική, γλυπτική κ.α).

Αυξήστε το n για να προκύψουν περισσότεροι όροι αυτής της ακολουθίας. Τί παρατηρείτε για το λόγο δύο διαδοχικών όρων αυτής της ακολουθίας όσο αυξάνει το n;

4.3 Ποια ιδιότητα έχουν οι όροι της ακολουθίας Fibonacci;

Δραστηριότητα 8

Δ8. Σταθερή περίμετρος - μέγιστο εμβαδόν

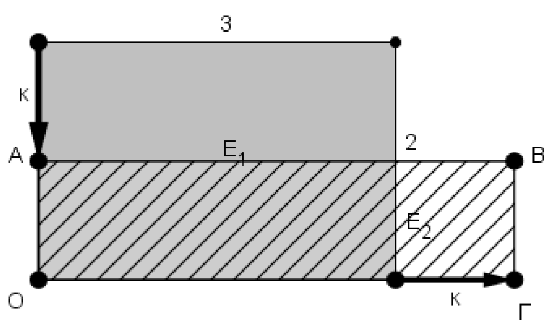
Στη δραστηριότητα εξετάζουμε το εξής πρόβλημα:

Γεωμετρική διατύπωση: "Από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο, ποιο έχει το μέγιστο εμβαδόν"

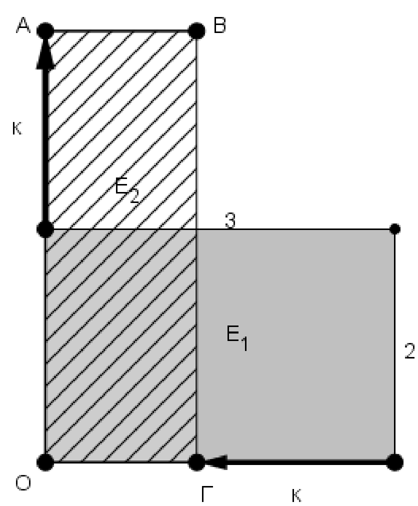
Αλγεβρική διατύπωση: "Από όλους τους πραγματικούς αριθμούς x και y με σταθερό άθροισμα, ποιοι έχουν το μέγιστο γινόμενο."[12]

Φύλλο εργασίας

Ο ιδιοκτήτης μιας έκτασης E_1 σχήματος ορθογωνίου, μήκους α=3 $(\times 10^2\ m)$ και πλάτους β=2 $(\times 10^2\ m)$ θα πρέπει να παραχωρήσει ένα τμήμα αυτής της έκτασης στο Δήμο της περιοχής ώστε να ανοιχθεί δρόμος που θα περνάει μέσα από αυτή. Η συμφωνία μεταξύ τους αφορούσε στο να μειωθεί μία από τις δύο διαστάσεις κατά κ μέτρα και να αυξηθεί η άλλη διάσταση επίσης κατά κ μέτρα. Αυτό μπορούσε να γίνει με δύο εναλλακτικούς τρόπους που φαίνονται στα σχήματα 1 & 2.



Σχ.1 - Νότιο-Ανατολική μεταβολή



Σχ.2 - Βόρειο-Δυτική μεταβολή

[12] Εισάγουμε το πρόβλημα μέσω ενός σεναρίου στο οποίο οι μαθητές καλούνται αρχικά χωρίς το ψηφιακό δόμημα να πάρουν ορισμένες αποφάσεις και να τις τεκμηριώσουν με τυπικά μαθηματικά.

1ο στάδιο (χωρίς τη χρήση του e-δομήματος)

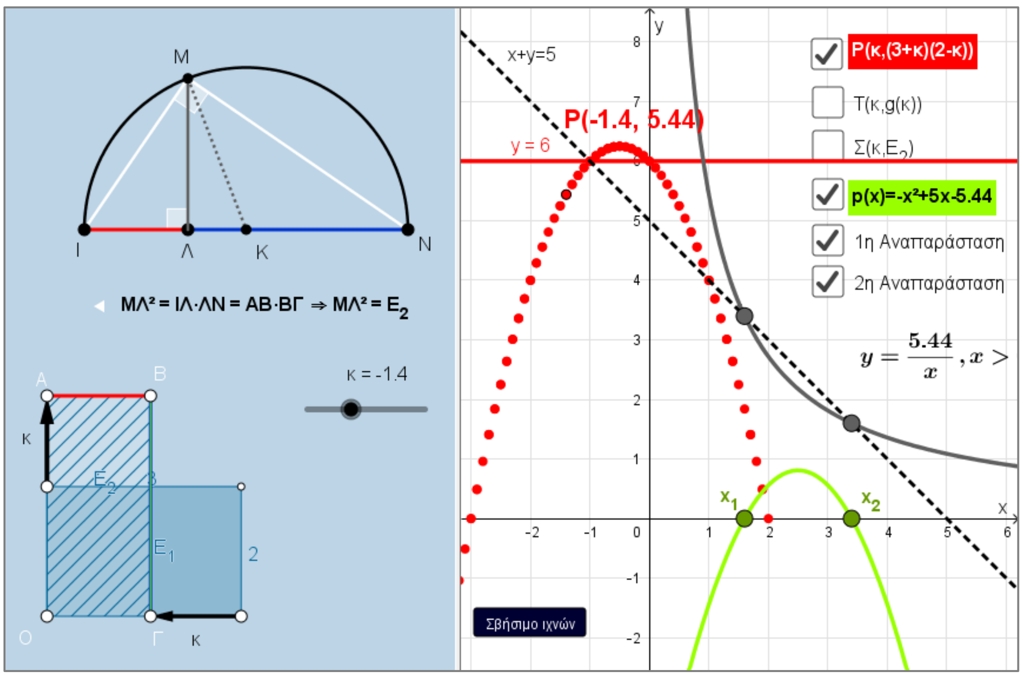
Υποθέστε ότι ο ιδιοκτήτης σας προσλαμβάνει ως σύμβουλο ώστε να του προτείνετε ένα από τα 2 είδη μεταβολής.

1.1 Τι μεταβάλλεται και τι παραμένει σταθερό στην παραπάνω μεταβολή;

1.2 Ποιο είδος μεταβολής θα τον συμβουλεύατε να επιλέξει προκειμένου να πάρει έκταση **ίση με την αρχική;** Αιτιολογήστε την απάντηση σας.

2ο στάδιο (χρήση του e-δομήματος)

Ανοίξτε το e-δόμημα (η εικόνα αφορά στο σύνολο των σταδίων).



(https://www.geogebra.org/m/dmat7jcc#material/tsbvqjpm).

Προαπαιτούμενες γνώσεις: Σχετικές θέσεις παραβολής με τον άξονα xx΄, εμβαδόν ορθογωνίου, τετράγωνο ύψους ορθογωνίου τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, επίλυση ανισώσεων 2ου βαθμού,

Σε αυτό υπάρχει ο δρομέας κ από τον οποίο μεταβάλλονται το μήκος α και το πλάτος β του ορθογωνίου E_1 κατά $\alpha \pm \kappa, \beta \mp \kappa$ αντίστοιχα.

2.1. Ανοίξτε διαδοχικά τους διακόπτες [P] και [T] και δώστε κίνηση στο δρομέα κ από το διακόπτη κάτω αριστερά. Στην οθόνη σχηματίζονται οι καμπύλες από το σημείο $P(\kappa, f(\kappa))$ με $f(\kappa)=(3+\kappa)(2-\kappa)$ και το σημείο $T(\kappa, g(\kappa))$ με $g(\kappa)=(3-\kappa)(2+\kappa)$.

Συμπληρώστε τα κενά και τις επιλογές στον παρακάτω πίνακα όπου Ν-Α είναι η νότιο-ανατολική μεταβολή και Β-Δ η βόρειο-δυτική :

Εξίσωση	Τιμές του κ	Είδος μεταβολής	
f(κ)=6	κ= …, …	☐ Ν-Α	☐ Β-Δ
g(κ)=6	κ = …, …	☐ Ν-Α	☐ Β-Δ

Δικαιολογήστε τις επιλογές σας για το "Είδος μεταβολής" που επιλέξατε:

2.2. Με ανοικτό το διακόπτη μόνο των σημείων P, παρατηρήστε την παραβολή που διαγράφει το σημείο P. Σε αυτή τη γραφική παράσταση υπάρχει κάποιο μαθηματικό λάθος. Μπορείτε να το εντοπίσετε και να προτείνετε τρόπο για να το επιδιορθώσετε;

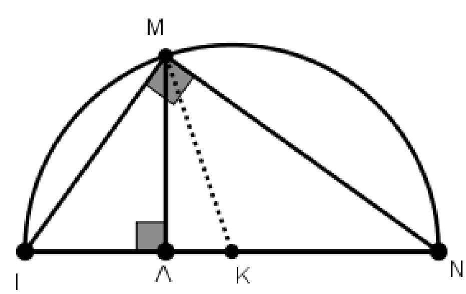
3ο στάδιο (διατύπωση εικασίας)

Υποθέστε τώρα ότι στις διαπραγματεύσεις του Ιδιοκτήτη με το Δήμο, προσφέρθηκε η δυνατότητα να ανταλλάξει την έκταση E_1 με έκταση **μεγαλύτερου** εμβαδού από τη δική του, μεταβάλλοντας πάλι το μήκος και το πλάτος με τον ίδιο τρόπο όπως και στο προηγούμενο ερώτημα.

Σε αυτό το στάδιο εξετάζουμε την περίπτωση αν είναι δυνατό ο Ιδιοκτήτης να πάρει έκταση μεγαλύτερη από την αρχική και σε καταφατική περίπτωση με ποιον τρόπο μεταβολής του αρχικού εμβαδού. (Εργαστείτε μόνο με το μοντέλο f(κ) για το εμβαδόν E_2).

3.1. Από το γράφημα των σημείων P, βρείτε τις τιμές του κ ώστε $E_2>6$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

3.2. Να αιτιολογήσετε ότι και σε αυτή την περίπτωση, ο Ιδιοκτήτης παίρνει έκταση μεγαλύτερη από την αρχική, πάλι και μόνο με Β- Δ μεταβολή.



$M\Lambda^2 = I\Lambda \cdot \Lambda N = AB \cdot B\Gamma \Rightarrow M\Lambda^2 = E_2$

3.3. Ανοίξτε το διακόπτη "1η Αναπαράσταση". Εμφανίζεται το ημικύκλιο διαμέτρου ΙΝ όπου: $I\Lambda = AB$ και $\Lambda N = OA$.

Τότε σε κάθε θέση του σημείου Λ, για το ύψος ΜΛ του ορθογωνίου τριγώνου ΙΜΝ θα ισχύει: $M\Lambda^2 = I\Lambda \cdot \Lambda N$

Μπορείτε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω στοιχεία ώστε να εξετάσετε αν και πότε **μεγιστοποιείται** το εμβαδόν E_2 ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

3.4. Από τα ευρήματα της προηγούμενης ερώτησης, διατυπώστε κάποιον ισχυρισμό που φαίνεται να ισχύει σχετικά με τα εμβαδά ορθογωνίων όπως του E_2: Δηλαδή *από όλα τα ορθογώνια που έχουν σταθερή περίμετρο, ποιο έχει το μέγιστο εμβαδόν;*

4ο στάδιο: Απόδειξη ισχυρισμού

4.1. Αν συμβολίσουμε με x και y τις διαστάσεις του ορθογωνίου E_2, δείξτε ότι το σύστημα :

$(\Sigma): \begin{cases} x+y=5 \\ xy=E_2 \end{cases}$ είναι ισοδύναμο με την εξίσωση $-x^2+5x-E_2=0$

4.2. Ανοίξτε το διακόπτη p(x). Σχηματίζεται η γραφική παράσταση της παραβολής $p(x)=-x^2+5x-E_2$. Πειραματιστείτε για τις διάφορες τιμές του κ. Τί παρατηρείτε για τη σχετική θέση της γραφικής παράστασης με τον άξονα xx΄ καθώς μεταβάλλεται το κ;

4.3. Από ποια σχέση ερμηνεύεται αλγεβρικά αυτή η παρατήρηση;

4.4. Μπορείτε τώρα να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E_2 γίνεται μέγιστο όταν $x=y=2.5$;

4.5. Αξιοποιώντας την ταυτότητα: $xy=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$ να δώσετε μία $2^η$ απόδειξη για τη μεγιστοποίηση του εμβαδού E_2.

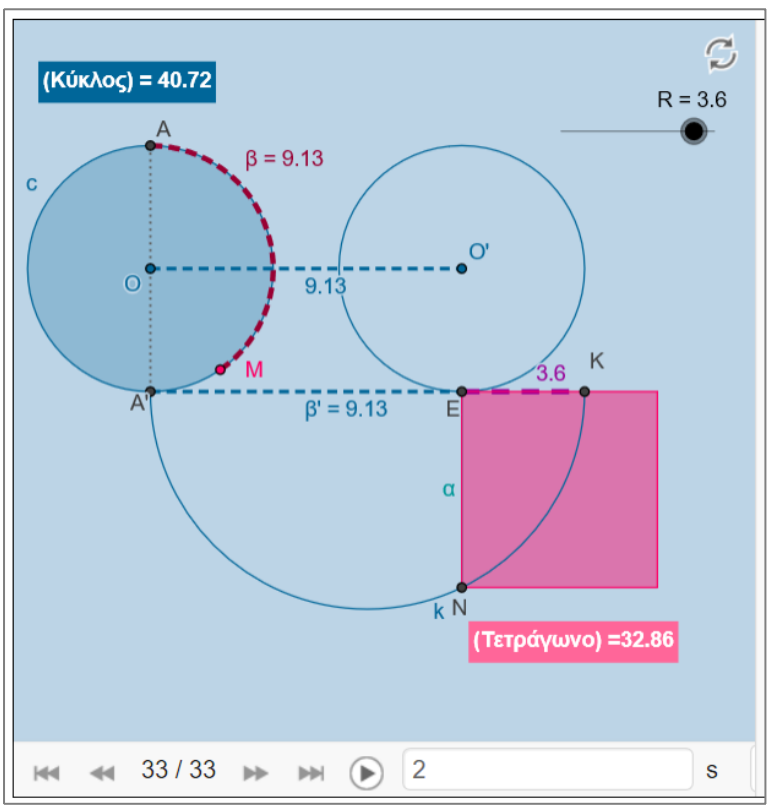
4.6. Τελικά ποια λύση θα προτείνατε στον Ιδιοκτήτη της έκτασης να διαπραγματευτεί με το Δήμο της περιοχής του;

Δραστηριότητα 9

Δ9. Ο «τετραγωνισμός» του κύκλου

Τετραγωνισμός ενός κύκλου σημαίνει ότι η κατασκευή, με γεωμετρική ή αλγεβρική μέθοδο, ενός τετραγώνου με εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του κύκλου. Η δυσκολία του προβλήματος συνίσταται σε δύο περιορισμούς που έθεσαν σε αυτό οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί. Πιο συγκεκριμένα, για να θεωρηθεί αποδεκτή μία λύση του προβλήματος, σε αυτήν θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί ***μόνο κανόνας και διαβήτης****, προκειμένου η απόδειξη να ανάγεται πλήρως στα θεωρήματα του Ευκλείδη και, να μην πραγματοποιείται μετά από άπειρο αριθμό βημάτων.*

Αποδεικνύεται ότι το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου επιλύεται εύκολα αν άρουμε οποιονδήποτε από αυτούς τους δύο περιορισμούς. Η επίλυση του προβλήματος συνδέεται άμεσα με την υπερβατικότητα του αριθμού π: Αν κάποιος έχει καταφέρει να τετραγωνίσει τον κύκλο, σημαίνει ότι με κάποιο τρόπο έχει υπολογίσει μία συγκεκριμένη αλγεβρική τιμή για το π. Κάτι τέτοιο όμως δεν είναι εφικτό γιατί ο αριθμός π είναι **υπερβατικός** (δηλ. δεν μπορεί να είναι ρίζα κανενός πολυωνύμου με ρητούς συντελεστές), οπότε δεν έχει συγκεκριμένη αλγεβρική τιμή. Πράγματι, το ενδιαφέρον για την επίλυση του προβλήματος του τετραγωνισμού του κύκλου εξανεμίζεται το 1882, όταν ο **Φέρντιναντ Φον Λίντεμαν** (Ferdinand von Lindemann) απέδειξε ότι το π είναι υπερβατικός αριθμός.



https://www.geogebra.org/m/jtp2uqzv

Προαπαιτούμενες γνώσεις: Μήκος περιφέρειας, εμβαδόν κυκλικού δίσκου, εμβαδόν τετραγώνου, κατασκευή μέσης ανάλογου δύο ευθ. τμημάτων.

Έστω ο κύκλος (Ο,R) και το σημείο Μ του ημικυκλίου ΑΑ΄. Θεωρούμε το τμήμα ΟΟ΄ τέτοιο ώστε: $OO' = \beta$, όπου β είναι το μήκος του τόξου ΑΑ΄. Στη συνέχεια, κατασκευάζουμε το ημικύκλιο διαμέτρου $AK = AE + EK = \beta + R$.

Ερωτήματα

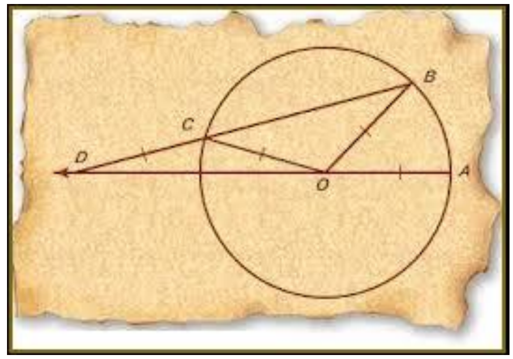
1. Όταν το σημείο Μ συμπέσει με το σημείο Α΄, τί μήκος θα έχει τότε το τόξο β;
2. Για κάθε θέση του σημείου Μ, με τί θα ισούται η **μέση ανάλογος** των τμημάτων Α΄Ε και ΕΚ και πώς κατασκευάζεται αυτή;
3. Πώς συνδέεται το τμήμα ΕΝ με τα τμήματα Α΄Ε και ΕΚ;
4. Συμπληρώστε τη σχέση του τμήματος ΕΝ με τα τμήματα Α΄Ε και ΕΚ, όταν το σημείο Μ συμπέσει με το σημείο Α΄,
5. Ποιο συμπέρασμα προκύπτει για το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς ΕΝ σε σχέση με τον κύκλο (Ο,R);
6. Από την κατασκευή που προηγήθηκε, ποιο στάδιο τής κατασκευής πιστεύετε ότι δεν μπορεί να υλοποιηθεί με Ευκλείδειο τρόπο; (δηλαδή με κανόνα και διαβήτη).

Δραστηριότητα 10

Δ10. Η τριχοτόμηση τυχαίας γωνίας – Μέθοδος Αρχιμήδη[13]

Εισαγωγή

Εκτός από τα προβλήματα που επιλύονται στο πλαίσιο της Ελληνικής γεωμετρικής παράδοσης του Ευκλείδη, εμφανίστηκαν και τα γνωστά ως άλυτα (ή πιο σωστά ως μη επιλύσιμα) προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών της αρχαιότητας:



- *Τετραγωνισμός του κύκλου*
- *Διπλασιασμός του κύβου*
- *Τριχοτόμηση μιας οξείας γωνίας*
- *Κατασκευή κανονικών πολυγώνων*

Στην αρχαιότητα, σημαντική συμβολή στην επίλυση των άλυτων προβλημάτων είχαν οι μεγάλοι Έλληνες γεωμέτρες όπως, για παράδειγμα, ο **Ιππίας** ο Ηλείος, ο **Αρχιμήδης** ο Συρακούσιος, ο **Νικομήδης**, ο **Ιπποκράτης** ο Χίος. Ευτυχώς, τις πρώτες λύσεις αυτών των προβλημάτων διέσωσαν τόσο ο **Πάππος** στη Μαθηματική Συναγωγή του όσο και ο **Ευτόκιος** στα σχόλια του στο «Περί σφαίρας και κυλίνδρου» του Αρχιμήδη. Κύριο χαρακτηριστικό αυτών των προβλημάτων ήταν η αδυναμία εκτέλεσης των κατασκευών τους με τη βοήθεια χάρακα και διαβήτη καθώς επίσης και η ολοκλήρωση της κατασκευής σε πεπερασμένο πλήθος βημάτων.

Όμως αυτή η αποτυχία των αρχαίων Ελλήνων είχε ως αποτέλεσμα την επινόηση νέων εργαλείων, τεχνικών και μεθόδων που οδήγησαν στον εμπλουτισμό της «Ευκλείδειας Γεωμετρίας». Έτσι, επινοήθηκαν νέες καμπύλες όπως, για παράδειγμα, η τριχοτομούσα ή τετραγωνίζουσα του Ιππία, η κογχοειδής καμπύλη του Νικομήδη και η έλικα (ή σπείρα) του Αρχιμήδη. Επιπλέον, μαζί με αυτά τα προβλήματα που αδυνατεί να αντιμετωπίσει η Ευκλείδεια παράδοση, άρχισε να εφαρμόζεται με ιδιαίτερη επιτυχία και η μέθοδος της νεύσης. Το πιο σημαντικό όμως είναι ότι δόθηκε περαιτέρω ώθηση στη μελέτη των κωνικών τομών (έλλειψη, παραβολή, υπερβολή).

Με σκοπό να γνωρίσουμε ορισμένες από τις μεθόδους και τις καμπύλες που επινόησαν οι Αρχαίοι Έλληνες για την επίλυση του προβλήματος της τριχοτόμησης μιας οξείας γωνίας, επιλέξαμε κατασκευαστικές προσεγγίσεις που προτάθηκαν από δύο Γεωμέτρες: τον **Αρχιμήδη** και το **Νικομήδη**.

Ανάλυση του προβλήματος με σύγχρονα Μαθηματικά

Η τριχοτόμηση μιας οξείας γωνίας είναι αδύνατο να πραγματοποιηθεί μόνο με χάρακα και διαβήτη γιατί η εξίσωση που την εκφράζει είναι πολυωνυμική εξίσωση 3^{ου} βαθμού, χωρίς να μπορεί να αναχθεί σε 2^{ου} βαθμού. Πράγματι από την τριγωνομετρία, είναι γνωστή η σχέση:

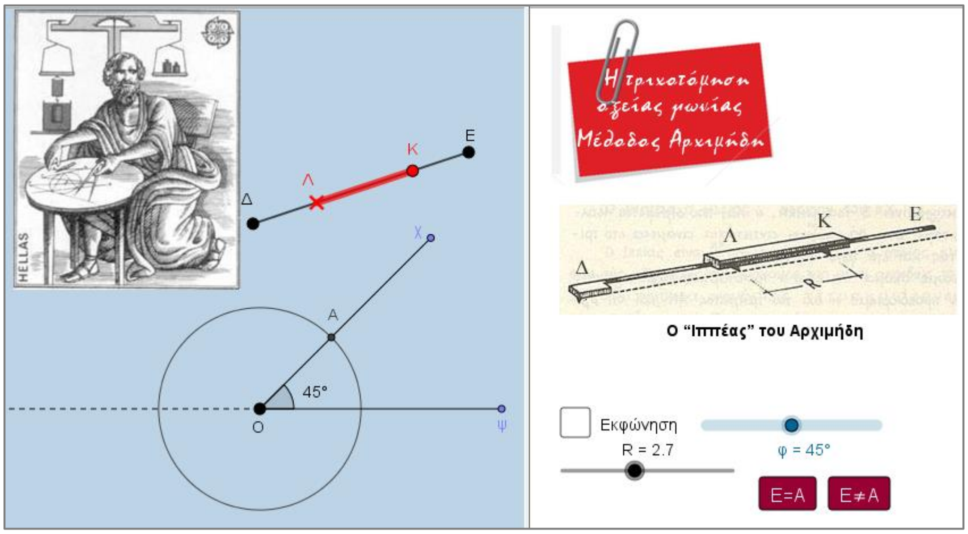
$$\varepsilon\varphi 3\theta = \frac{3\varepsilon\varphi\theta - \varepsilon\varphi^2\theta}{1 - \varepsilon\varphi^2\theta}$$

[13] Σήμερα δεν γνωρίζουμε κάτω από ποιες συνθήκες τέθηκε το πρόβλημα της τριχοτόμησης γωνίας στην ελληνική αρχαιότητα. Ξέρουμε όμως ότι αποτελούσε το ένα από τα τρία μεγάλα προβλήματα μετά το Δήλιο (διπλασιασμός κύβου) και τον τετραγωνισμό του κύκλου. Ουσιαστικά το πρόβλημα έγκειται στην τριχοτόμηση οξείας γωνίας, διότι αν είναι αμβλεία αφαιρούμε από αυτήν την ορθή που μπορεί να τριχοτομηθεί με χάρακα και διαβήτη.

Αν σε αυτή τη σχέση θέσουμε $εφ3θ = α, εφθ = x$ καταλήγουμε στην εξίσωση $x^3 - 3αx^2 - 3x + α = 0$. (1)

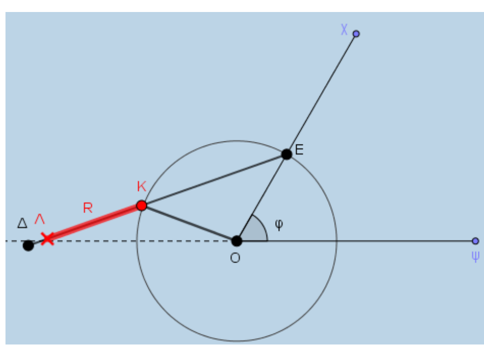
Η κατασκευή των ριζών μίας εξίσωσης όπως η (1) με γνώμονα και διαβήτη, είναι δυνατή αν και μόνο αν μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο ενός πρωτοβάθμιου και ενός δευτεροβάθμιου παράγοντα. Για την εξίσωση (1) αποδείχθηκε μόλις το 1837 ότι κάτι τέτοιο είναι αδύνατο.

Πειραματισμός στη δραστηριότητα



https://www.geogebra.org/m/dmat7jcc#material/jezdtshp

Προαπαιτούμενες γνώσεις: Σχέση εξωτερικής γωνίας τριγώνου με τις απέναντι εσωτερικές γωνίες.



Έστω η γωνία xOy και ο κύκλος (O,R) ο οποίος τέμνει την πλευρά Ox στο σημείο A. Μετά από την προσαρμογή του ιππέα, δημιουργείται το παραπάνω σχήμα.

Ερωτήματα

1. Αν καλέσουμε ω τη γωνία ΚΛΟ, να εκφράσετε τη γωνία ΕΚΟ συναρτήσει της γωνίας ω.

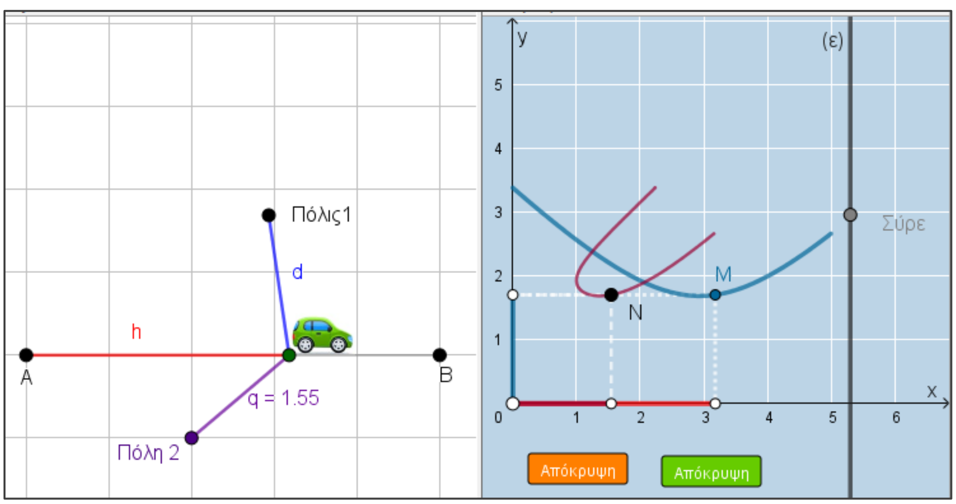
2. Να αποδείξετε ότι: $\phi = 3\omega$.

3. Ποιο στάδιο τής κατασκευής πιστεύετε ότι δεν εκτελείται με Ευκλείδεια κατασκευή;

Δραστηριότητα 11

Δ11. Η έννοια της συνάρτησης μέσω στοιχειωδών γεωμετρικών ιδιοτήτων

Η δραστηριότητα έχει ως στόχο να εισάγει την έννοια της συνάρτησης ως συμμεταβολής δύο μεγεθών. Ειδικότερα, να αναδείξει τη διαφορά σε μία τυχαία συμμεταβολή και στη συμμεταβολή που ορίζει συνάρτηση, με βάση τη γραφική παράσταση. Επιπλέον, στη συγκεκριμένη δραστηριότητα υπάρχουν στο 3ο στάδιο προεκτάσεις, που αφορούν στο συσχετισμό ορισμένων χαρακτηριστικών μίας συνάρτησης (όπως για παράδειγμα τη μονοτονία, τα ακρότατα και το 1-1 μίας συνάρτησης) με στοιχειώδεις γεωμετρικές ιδιότητες (όπως για παράδειγμα η ιδιότητα των σημείων της μεσοκαθέτου, η σύγκριση πλάγιων με κάθετα τμήματα κ.ά). Τονίζουμε, ότι στη συγκεκριμένη δραστηριότητα, αναδεικνύονται χαρακτηριστικά της Ευκλείδειας Γεωμετρίας με τα οποία οι μαθητές αναγνωρίζουν τόσο την αποδεικτική της δυναμική όσο και τη δυναμική ερμηνείας ιδιοτήτων των συναρτήσεων με απλές γεωμετρικές έννοιες. Η χρήση της τεχνολογίας υποστηρίζει παράλληλες συνδέσεις μεταξύ διαφορετικών αναπαραστασιακών συστημάτων: στη συγκεκριμένη δραστηριότητα, οι εμπλεκόμενοι μπορούν να διαπιστώσουν τη σημασία και την πρόσθετη παιδαγωγική αξία των πολλαπλών αναπαραστάσεων στη διδασκαλία των Μαθηματικών.



https://www.geogebra.org/m/swpdsfnd#material/rf2nbhzy [14]

Προαπαιτούμενες γνώσεις: Ιδιότητα σημείων μεσοκαθέτου, ανισοτικές σχέσεις μεταξύ πλευρών και γωνιών ενός τριγώνου, σύγκριση πλάγιων τμημάτων ως προς μια ευθεία.

[14] Αρχική ιδέα για το γράφημα συνάρτησης των Κ. Γαβρίλη και Γ. Ψυχάρη από το ψηφιακό σχολείο. Επέκταση δραστηριότητας στο 3ο στάδιο Μ. Τσιλπιρίδης.

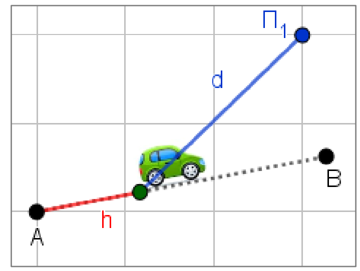
Ερωτήματα

1ο στάδιο (εξέταση συμμεταβολής των μεταβλητών h και d)

Μετακινήστε το σημείο “*Αυτοκίνητο*” κατά μήκος της διαδρομής ΑΒ.

1.1 Ποιες είναι οι μεταβλητές τού προβλήματος;

1.2 Έστω Μ το σημείο με συντεταγμένες (h,d). Για τη διάταξη των σημείων Α, Β και Πόλη1 που φαίνονται στο σχήμα, προσπαθήστε να σχεδιάσετε στο χαρτί την καμπύλη που διαγράφει το σημείο Μ σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων xOy.



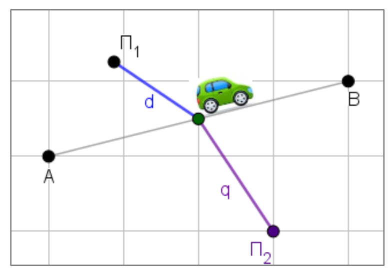
1.3 Από τη μορφή της καμπύλης που σχεδιάσατε, προκύπτει αν η συγκεκριμένη συμμεταβολή είναι συνάρτηση; Επαληθεύστε στη συνέχεια τα αποτελέσματα ανοίγοντας το διακόπτη «Γραμμή Μ».

2ο στάδιο (εξέταση συμμεταβολής των μεταβλητών q και d)

Ανοίξτε το διακόπτη *“Εμφάνισε το σημείο Ν”*.

2.1 Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου Ν;

2.2 Ποια συμμεταβολή εκφράζει η γραμμή που διαγράφει το σημείο Ν;

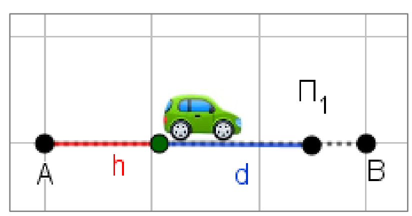


2.3 Μετακινήστε την ευθεία (ε) σε διάφορες θέσεις: Βρίσκετε κάποια διαφορά στα γραφήματα των σημείων Μ και Ν;

2.4 Αναζητήστε τον ορισμό της συνάρτησης και απαντήστε στο ερώτημα: "Σε ποια από τις δύο συμμεταβολές (h,d) και (q,d) έχουμε συνάρτηση;"[15]

3ο στάδιο (Γεωμετρική επέκταση)

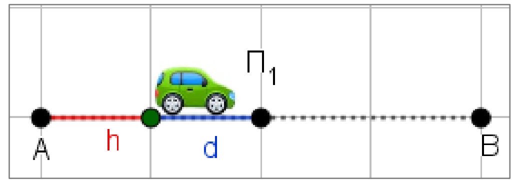
3.1 Ανοίξτε το διακόπτη «Γραμμή Μ» και μετακινήστε το σημείο $Π_1$ διαδοχικά σε κάποιο σημείο του τμήματος ΑΒ και τέλος στις θέσεις Α και Β. Τί παρατηρείτε τώρα για τη γραμμή που διαγράφει το σημείο Μ;



[15] Στο σημείο αυτό αναφέρουμε ότι είναι εξαιρετικά δύσκολο (αν όχι απίθανο) να υπάρξει αλγεβρική αιτιολόγηση στο ερώτημα “*γιατί αυτό το είδος συμμεταβολής δεν αντιστοιχεί σε συνάρτηση*». Η συγκεκριμένη -σχεδόν ανυπέρβλητη- δυσκολία θεωρούμε ότι προσδίδει πρόσθετη διδακτική αξία στη γεωμετρική προσέγγιση της δραστηριότητας που περιγράφεται στο 3ο στάδιο και ειδικότερα στο ερώτημα 3.10, το οποίο στοχεύει να δημιουργήσει μέσω γεωμετρικών αναφορών το εννοιολογικό υπόβαθρο για την απάντηση του ερωτήματος.

3.2 Να αιτιολογήσετε τη μορφή της γραμμής που διαγράφει το σημείο Μ όταν η θέση του σημείου $Π_1$ είναι στο Α ή στο Β.

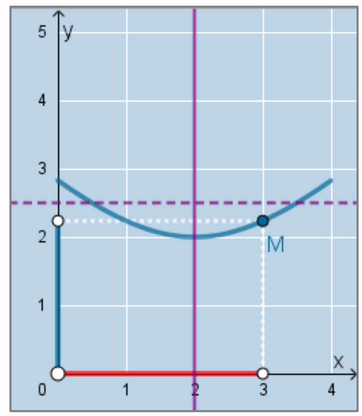
3.3 Κλείστε τους διακόπτες «Γραμμή Μ» και «Γραμμή Ν». Δίνεται η διπλανή διάταξη των σημείων Α και Β με το σημείο $Π_1$ να είναι στο ***μέσο*** του ΑΒ. Να εικάσετε τη μορφή της γραμμής του σημείου Μ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. Επαληθεύστε την με άνοιγμα του διακόπτη «Γραμμή Μ».



3.4 Στο σχήμα δίνεται η γραμμή που διαγράφει το σημείο Μ, η οποία είναι συμμετρική ως προς την κατακόρυφη ευθεία που περνά από το σημείο (2,0) του άξονα xx'.

Να προσαρμόσετε κατάλληλα το δρόμο ΑΒ και την Πόλη1 ώστε να πάρετε τη συγκεκριμένη γραμμή.

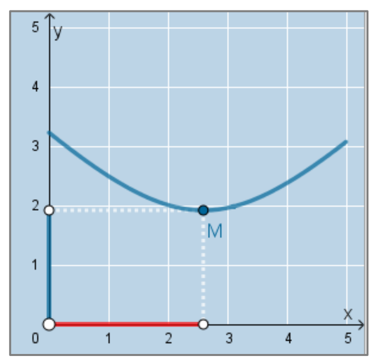
- Σε ποια ευθεία φαίνεται να ανήκει το σημείο $Π_1$;
- Πώς ερμηνεύεται από τη διάταξη των σημείων Α,Β και $Π_1$ η συμμετρία της καμπύλης του Μ; [16]



3.5 Δίνεται η γραφική παράσταση του σχήματος.

I. Τι παρατηρείτε για τη θέση του σημείου Μ σε σχέση με τα υπόλοιπα σημεία της γραφικής παράστασης;

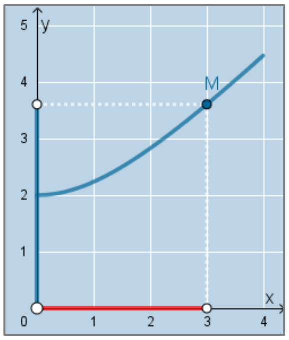
II. Σε ποιο σημείο της διαδρομής ΑΒ του αυτοκινήτου θα έχουμε τη συγκεκριμένη θέση για το σημείο Μ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



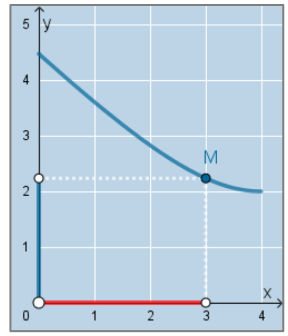
3.6 Στο επόμενο σχήμα (βλ. σχήμα Ι) δίνεται η γραμμή που διαγράφει το σημείο Μ, για την οποία παρατηρούμε ότι όσο ***αυξάνει το h αυξάνει και το d***. Να προσαρμόσετε κατάλληλα τα σημεία Α, Β και Πόλη1 ώστε να προκύπτει τέτοιας μορφής γραμμή και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά την κατασκευή σας.

---

[16] Σημειώνουμε ότι σε αυτό το σημείο και εφόσον έχει διδαχθεί ο ν. συνημιτόνων, είναι δυνατό να προστεθεί και το ερώτημα *"να βρεθεί ο τύπος τής συνάρτησης h(d)"*.



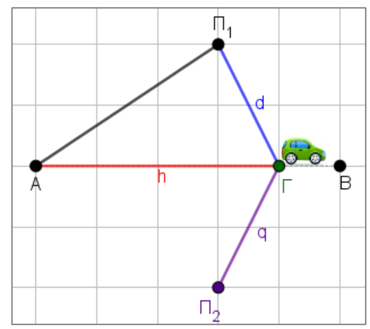
σχήμα I



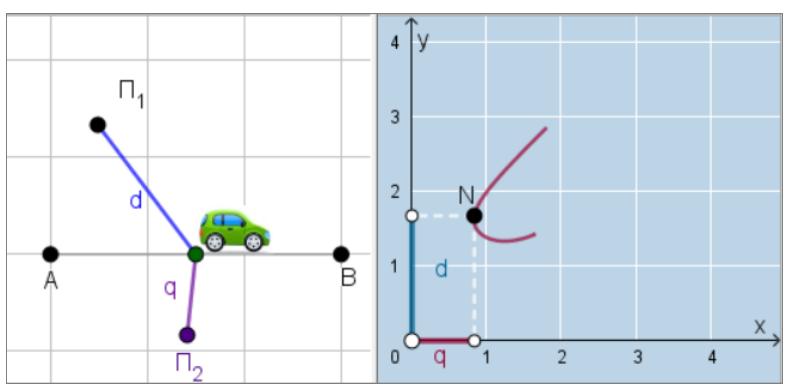
σχήμα II

3.7 Επαναλάβατε την προηγούμενη εργασία ώστε να έχετε καμπύλη όπως στο σχήμα II όπου όσο ***αυξάνεται το h μειώνεται το d***. Αιτιολογήστε γεωμετρικά την κατασκευή σας.

3.8 Τοποθετήστε τα σημεία $Π_1$ και $Π_2$ όπως φαίνεται στο σχήμα (δηλαδή η ΑΒ να είναι μεσοκάθετος του $Π_1Π_2$) και εμφανίστε τη γραμμή που διαγράφει το σημείο Ν. Τι παρατηρείτε τώρα για το γράφημα του σημείου Ν; Πρόκειται για γράφημα συνάρτησης; Σε καταφατική απάντηση, να αιτιολογήσετε κάνοντας χρήση των γεωμετρικών ιδιοτήτων του σχήματος.



3.9 Στην επόμενη διάταξη των πόλεων $Π_1$ και $Π_2$ (η ευθεία $Π_1Π_2$ δεν είναι κάθετη στην ΑΒ) διαπιστώθηκε ότι η συμμεταβολή της μεταβλητής d με τη μεταβλητή q, **δεν** είναι συνάρτηση. Με βάση τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της διάταξης των πόλεων να αιτιολογήσετε γιατί αυτή η συμμεταβολή δεν είναι συνάρτηση.



3.10 Με βάση το προηγούμενο ερώτημα, βρείτε ένα σύνολο των σχετικών θέσεων των σημείων $Π_1$ και $Π_2$ για τις οποίες το γράφημα του σημείου Ν αντιστοιχεί σε **γράφημα συνάρτησης**.

3.11 Αιτιολογήστε με βάση τον ορισμό της συνάρτησης, γιατί η συμμεταβολή d(h) στο $1^{ο}$ πείραμα, αποτελεί συνάρτηση, για κάθε θέση του σημείου $Π_1$ σε σχέση με το δρόμο ΑΒ.

η δυναμική της **Ευκλείδειας Γεωμετρίας**

στα σύγχρονα Μαθηματικά

διαυλοι επικοινωνίας μεταξύ της Άλγεβρας, Αναλυτικής και Ευκλείδειας Γεωμετρίας

- Απαντήσεις
- Υποδείξεις
- Χειρισμός ψηφιακών δομημάτων

διδακτικές παρεμβάσεις για τη Β΄ Λυκείου

Δραστηριότητα 1

Δ1. Κάθετα και πλάγια τμήματα: Μεγιστοποίηση εμβαδού

2. $E=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot \upsilon$

4. Το σημείο P διαγράφει ευθεία. Επειδή το AB είναι σταθερό, η σχέση του εμβαδού είναι της μορφής $y=\alpha x$ και άρα ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

5. Από τη μορφή της γραμμής του σημείου P, φαίνεται ότι το εμβαδόν μεγιστοποιείται όταν το σημείο Γ βρίσκεται στο **μέσο** του ημικυκλίου.

7. Για κάθε θέση του σημείου Γ ισχύει ότι: $\upsilon\le O\Gamma$ ως κάθετο τμήμα στο AB. Άρα: $\upsilon=\max\Leftrightarrow K\equiv O$ δηλαδή όταν $O\Gamma\perp AB$.

Επέκταση δραστηριότητας

Το σημείο P φαίνεται να διαγράφει **παραβολή**.

Ισχύει ότι: $\upsilon=R\cdot\eta\mu\varphi$ όπου φ είναι η γωνία $AO\Gamma$ Τότε:

$$E=R\cdot\upsilon=\frac{\upsilon^2}{\eta\mu\varphi}=\frac{1}{\eta\mu\varphi}\cdot\upsilon^2$$

Επειδή η γωνία φ είναι σταθερή, άρα το εμβαδόν E είναι της μορφής $E=\alpha\upsilon^2,\alpha>0$ που η γραφική της παράσταση είναι παραβολή.

Δραστηριότητα 2

Δ2. Σταθερό εμβαδόν – ελάχιστη υποτείνουσα

1. Από τον πειραματισμό για διάφορες τιμές του εμβαδού E, φαίνεται ότι το εμβαδόν μεγιστοποιείται όταν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι **ισοσκελές**.

3. Αν θέσουμε $\gamma=x,\beta=y$ το σύστημα που περιγράφει το πρόβλημα είναι:

$$\begin{cases} xy=2E \\ x^2+y^2=\alpha^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} xy=2E \\ x^2+\dfrac{4E^2}{x^2}=\alpha^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} xy=2E \\ x^4-\alpha^2x^2+4E^2=0 \quad (1)\end{cases}$$

4. Αν στην (1) θέσουμε $x^2=\omega,\omega\ge 0$ παίρνουμε την εξίσωση 2^{ου} βαθμού $\omega^2-\alpha^2\omega+4E^2=0$.

6. Η παραβολή p ή θα τέμνει σε 2 σημεία τον άξονα xx΄ ή θα εφάπτεται σε αυτόν σε ένα σημείο.

7. Η προηγούμενη επισήμανση εκφράζεται από τη συνθήκη $\Delta\ge 0$ όπου Δ είναι η διακρίνουσα του τριωνύμου p(x).

8. Η προηγούμενη παρατήρηση δίνει:

$\Delta\ge 0\Leftrightarrow \alpha^4-16E^2\ge 0\Leftrightarrow \alpha\ge 2\sqrt{E}$

Επομένως η υποτείνουσα α γίνεται ελάχιστη όταν: $\alpha=2\sqrt{E}$. Σε αυτή την περίπτωση το τριώνυμο p(x) θα έχει δύο ίσες ρίζες. Οπότε θα ισχύει: $\omega=x^2=\frac{\alpha^2}{2}$

Και επειδή $x^2+y^2=\alpha^2\Rightarrow y^2=\frac{\alpha^2}{2}$ και τελικά $x=y$.

Τελικά από όλα τα ορθογώνια τρίγωνα με σταθερό εμβαδόν, το ισοσκελές έχει τη μικρότερη υποτείνουσα.

2η απόδειξη (αλγεβρική)

$$\alpha^2=x^2+y^2=x^2+\frac{4E^2}{x^2}=\left(x-\frac{2E}{x}\right)^2+4E\ge 4E$$

η οποία οδηγεί στην ίδια σχέση με τα προηγούμενα.

3η απόδειξη (γεωμετρική)

1. Για κάθε ημικύκλιο διαμέτρου ΒΓ θα ισχύει ότι: $AN\le \Lambda M$. Πράγματι: αν θεωρήσουμε την ακτίνα AM θα ισχύει:

$AN\le AM=R\Rightarrow AN\le\Lambda M$

2. Ισχύει ότι:

$\beta\cdot\gamma=\alpha\cdot AN\Rightarrow\alpha=\frac{2E}{AN}$ και επειδή $AN\le AM\Rightarrow\alpha\ge\frac{2E}{\Lambda M}$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι η υποτείνουσα α γίνεται ελάχιστη αν και μόνο αν $AN=\Lambda M$ δηλαδή αν το σημείο Α ταυτιστεί με το Λ και επομένως αν και μόνο αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι **ισοσκελές**.

2η Αναπαράσταση (αναλυτική γεωμετρία)

2. Ο κύκλος και η υπερβολή φαίνεται ή να τέμνονται σε δύο σημεία ή να εφάπτονται σε ένα σημείο.

3. Όταν η υποτείνουσα α γίνει ελάχιστη, οι δύο κωνικές τομές εφάπτονται σε ένα σημείο.

4. Όταν η υποτείνουσα α γίνει ελάχιστη, τότε οι εφαπτόμένες της υπερβολής στα σημεία Η και Θ ταυτίζονται. Επομένως μπορούμε να εικάσουμε ότι:

«δύο κωνικές τομές εφάπτονται σε ένα σημείο αν και μόνο αν δέχονται κοινή εφαπτομένη σε αυτό το σημείο».[17]

και κάτι τελευταίο...

Το σημείο P έχει συντεταγμένες: (γ,α) με:

$$\alpha=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+\left(\frac{2E}{x}\right)^2}=\sqrt{x^2+\frac{4E^2}{x^2}},x>0$$

Επομένως η συνάρτηση $\alpha(x)$ δεν είναι της μορφής

$y=\frac{k}{x},k\in\mathbb{R}^*$ δηλαδή υπερβολή.

Δραστηριότητα 3

Δ3. Σταθερή υποτείνουσα - μέγιστο ορθογώνιο

1. Από την υπόθεση του προβλήματος προκύπτουν:

$$\begin{cases}\beta^2+\gamma^2=\alpha^2\\ \beta\gamma=2E\end{cases}$$

όπου α σταθερό και η απαίτηση είναι για ποια συμμεταβολή των β και γ θα είναι E=max.

2. Το γινόμενο βγ εκφράζει το διπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ και το εμβαδόν του ορθογωνίου με πλευρές β και γ.

4. Από τη μορφή της καμπύλης που διαγράφει το σημείο $P(\gamma,2E)$ φαίνεται ότι υπάρχει κάποια θέση του P όπου το εμβαδόν Ε μεγιστοποιείται. Σε αυτή την περίπτωση, «φαίνεται» ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

7. Από τον προηγούμενο πειραματισμό, προκύπτει η εξής εικασία:
«Από όλα τα ορθογώνια τρίγωνα με σταθερή υποτείνουσα, το ισοσκελές έχει το μέγιστο εμβαδόν»
ή ισοδύναμα
«Από όλα τα ορθογώνια με σταθερή διαγώνιο, το τετράγωνο έχει το μέγιστο εμβαδόν».
ή τέλος (με αλγεβρική διατύπωση)
«από όλους τους πραγματικούς αριθμούς με σταθερό άθροισμα τετραγώνων, μέγιστο γινόμενο έχουν οι ίσοι».

1η Απόδειξη (ερμηνεία από τη γραφική παράσταση)

8. Αν συμβολίσουμε με x και y τις κάθετες πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ τότε το πρόβλημα αναπαρίσταται μέσω του συστήματος:

$$\begin{cases}xy=2\tau\\ x^2+y^2=\alpha^2\end{cases}$$

Όπου α σταθερή και ζητούμενο «πότε το εμβαδόν Ε μεγιστοποιείται».

9. Αντικαθιστούμε $y=\frac{2\tau}{x}$ και η 2η εξίσωση οδηγεί σε διτετράγωνη εξίσωση η οποία με το μετασχηματισμό $x^2=\omega,\omega\geq 0$ οδηγεί στην εξίσωση 2ου βαθμού:
$\omega^2-\alpha^2\omega+\tau^2=0$. (1)

11. Η παραβολή q ή θα **τέμνει** σε 2 σημεία τον άξονα xx΄ ή θα **εφάπτεται** σε αυτόν σε ένα σημείο.

12. Από το προηγούμενο, για τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου q(x), θα ισχύει: $\Delta\geq 0$ και επομένως:

$$\Delta\geq 0\Leftrightarrow\alpha^4-4\tau^2\geq 0\Leftrightarrow\tau^2\leq\frac{\alpha^4}{4}\Leftrightarrow\tau\leq\frac{\alpha^2}{2}$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι το τ μεγιστοποιείται όταν $\tau=\frac{\alpha^2}{2}$. Τότε θα ισχύει ότι $\Delta=0$ και η εξίσωση (1) θα έχει δύο ίσες ρίζες και θα είναι:

$$\omega_1=\omega_2=\frac{\alpha^2}{2}\Rightarrow x^2=\frac{\alpha^2}{2}\Rightarrow x=\frac{\alpha\sqrt{2}}{2},x>0$$

και αφού $x^2+y^2=\alpha^2\Rightarrow y=\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$ οπότε το γινόμενο $\tau=xy$ μεγιστοποιείται αν και μόνο αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Γεωμετρική Απόδειξη

13. Θα ισχύει ότι: $AN\leq\Lambda M$ (βλ. δραστηριότητα 2 το ερώτημα 3.2).

14. Επειδή $AN\leq\Lambda M$ από τη σχέση:
$\beta\gamma=\alpha\cdot AN\leq\alpha\cdot\Lambda M\Rightarrow\tau\leq\alpha\cdot\Lambda M$
Επομένως το εμβαδόν γίνεται μέγιστο όταν $\tau=\alpha\cdot\Lambda M$ άρα όταν $AN=\Lambda M$ δηλαδή όταν το Α ταυτιστεί με το Λ. Τότε φανερά το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

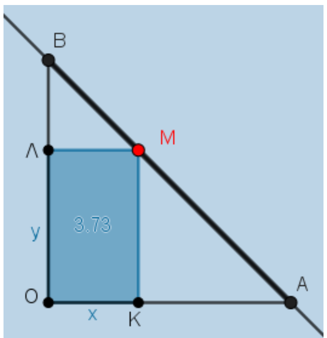
[17] Στην ύλη του Διαφορικού Λογισμού της Γ΄ Λυκείου, θα δοθεί ο ορισμός της εφαπτομένης μίας οποιασδήποτε καμπύλης.

Δραστηριότητα 4

Δ4. Μέγιστο εμβαδόν εγγεγραμμένου ορθογωνίου

1. Από την καμπύλη που διαγράφει το σημείο P, φαίνεται ότι το εμβαδόν Ε μεγιστοποιείται όταν το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

Αιτιολόγηση:



Επειδή το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές και ορθογώνιο, το ίδιο θα ισχύει και για το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΛΜ (…). Οπότε θα είναι: ΛΜ=ΒΛ και επομένως: $M\Lambda + MK = OB$. Δηλαδή το ορθογώνιο ΟΚΜΛ έχει σταθερή περίμετρο. Τότε το εμβαδόν του θα μεγιστοποιείται αν και μόνο αν είναι $M\Lambda = MK$ δηλαδή όταν το ΟΚΜΛ είναι **τετράγωνο.**

3. Όταν το τρίγωνο ΟΑΒ δεν είναι ισοσκελές, τότε δεν ισχύει η προηγούμενη εικασία.

4. Το σημείο P φαίνεται να διαγράφει παραβολή.

5. Το σημείο P έχει συντεταγμένες (x_M, E) και ισχύει ότι:
$\alpha x_M + \beta y_M = \gamma$ (1) και

$$E = x_M y_M \Rightarrow E = x_M \frac{\gamma - \alpha x_M}{\beta} = -\frac{\alpha}{\beta} x_M{}^2 + \frac{\gamma}{\beta} x_M$$

Οπότε η συμμεταβολή του Ε με το x_M είναι τριώνυμο και άρα η γραφική παράσταση Ε(x_M) είναι **παραβολή**.

6. Η προηγούμενη παραβολή έχει μέγιστο όταν:

$$x_M = -\frac{\frac{\gamma}{\beta}}{2\frac{\alpha}{-\beta}} = \frac{\gamma}{2\alpha} \text{ και από τη σχέση (1) } y_M = \frac{\gamma}{2\beta}$$

Από τις τελευταίες σχέσεις προκύπτει ότι:

$$x_M \cdot \alpha = y_M \cdot \beta \Rightarrow \frac{x_M}{\beta} = \frac{y_M}{\alpha}$$

που είναι και η ζητούμενη.

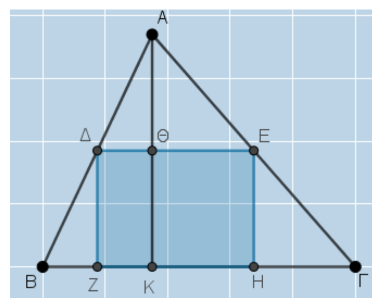
7. Τα σημεία τομής Α και Β της ευθείας $\alpha x + \beta y = \gamma$ με τους άξονες θα είναι: $A(\frac{\gamma}{\alpha}, 0), B(0, \frac{\gamma}{\beta})$. Το μέσο του ΑΒ θα έχει συντεταγμένες:

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right) = \left(\frac{\gamma}{2\alpha}, \frac{\gamma}{2\beta} \right)$$

Άρα το εμβαδόν του ορθογωνίου μεγιστοποιείται όταν το σημείο Μ είναι **μέσο** του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ και επομένως ο ισχυρισμός είναι αληθής.

8. Από το προηγούμενο, αρκεί να βρίσκουμε το μέσο της υποτείνουσας ΑΒ του ορθογωνίου τριγώνου ΟΑΒ. Αυτό πραγματοποιείται με Ευκλείδεια κατασκευή (κατασκευή της μεσοκαθέτου του τμήματος ΑΒ).

9. Αν ΑΒΓ είναι ένα τυχαίο τρίγωνο, τότε με βάση τα προηγούμενα, αρκεί να θεωρήσουμε τα μέσα Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα και να κατασκευάσουμε το ορθογώνιο ΔΕΗΖ.



Δραστηριότητα 5

Δ5. Σταθερό εμβαδόν - ελάχιστη περίμετρος - Ι

1,2: Από τον πειραματισμό φαίνεται ότι η παράσταση $x + y$ (δηλαδή η ημιπερίμετρος του ορθογωνίου) γίνεται ελάχιστη όταν το ορθογώνιο γίνει τετράγωνο.

3. Η απόσταση d εκφράζει την απόσταση της αρχής των αξόνων από την ευθεία $x + y = \tau$ η οποία θα δίνεται από τον τύπο:

$$d = \frac{|0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 - \tau|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\tau}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\tau}{2} \quad (1)$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι τα μεγέθη d και τ είναι **ανάλογα** και επομένως όταν ελαχιστοποιείται το d ελαχιστοποιείται και το τ και αντίστροφα.

5. Πράξεις.
6. Η παραβολή q ή θα τέμνει τον άξονα xx΄ σε δύο σημεία ή θα εφάπτεται σε ένα σημείο.
7. Από την προηγούμενη παρατήρηση, προκύπτει ότι η διακρίνουσα Δ του τριωνύμου q(x) θα είναι μη αρνητική. Οπότε:

$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \tau^2 - 4E \geq 0 \Leftrightarrow \tau \geq 2\sqrt{E}$

Επομένως η ημιπερίμετρος τ ελαχιστοποιείται αν και μόνο $\Delta = 0$.

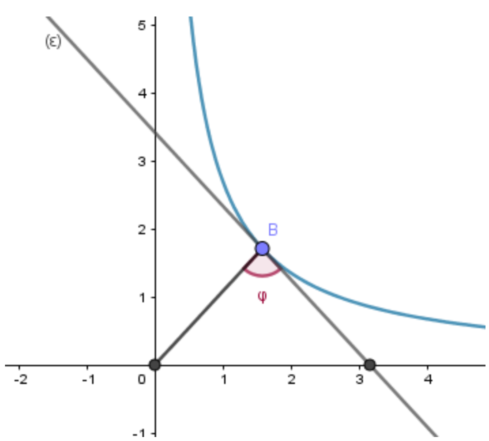
Τότε η εξίσωση $q(x) = 0$ θα έχει 2 ίσες ρίζες με $x = \frac{\tau}{2}$ και αφού $x + y = \tau \Rightarrow y = \frac{\tau}{2}$ και επομένως το ορθογώνιο θα είναι **τετράγωνο**.

Επέκταση δραστηριότητας

9. Η ευθεία $x + y = \tau$ ή θα τέμνει την υπερβολή $y = \frac{E}{x}, x > 0$ σε δύο σημεία ή θα εφάπτεται σε ένα σημείο.

10. Η ευθεία $x + y = \tau$ εφάπτεται της υπερβολής.

11. Θεωρούμε Β τυχαίο σημείο της υπερβολής και την εφαπτομένη της (ε) σε αυτό το σημείο. Η απόσταση του Ο από την υπερβολή θα είναι το τμήμα ΟΒ για το οποίο θα ισχύει: $(\varepsilon) \perp OB \Leftrightarrow \phi = 90°$.



Δραστηριότητα 6

Δ6. Σταθερό εμβαδόν - ελάχιστη περίμετρος – ΙΙ-

1ο στάδιο

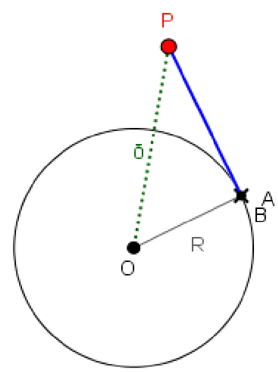
1.1 Παραμένει σταθερό για τις διάφορες θέσεις της τέμνουσας.

1.2 Οι τιμές του γινομένου p εξαρτώνται από θέση του σημείου Ρ (δηλ. το μήκος του τμήματος δ) και από την ακτίνα R του κύκλου.

1.3 Η ευθεία ΡΑΒ τείνει να γίνει η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α.

1.4 Από εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΡΑ θα είναι:

$PA \cdot PB = PA^2 = \delta^2 - R^2$



1.5 Όταν το σημείο Ρ είναι εσωτερικό στον κύκλο, τότε και πάλι το γινόμενο p παραμένει σταθερό.

1.6 Το γινόμενο p θα μπορούσε να εκφράζει το εμβαδόν ορθογωνίου με πλευρές ΡΑ και ΡΒ.

1.7 Από τις μετρήσεις της ημιπεριμέτρου τ, προκύπτει ότι όταν τα σημεία Α και Β ταυτίζονται, τότε λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της.

1.8 Όταν το Β τείνει να ταυτιστεί με το Α, το ορθογώνιο τείνει να γίνει τετράγωνο.

1.9 Από όλα τα ορθογώνια με σταθερό εμβαδόν, το τετράγωνο έχει την ελάχιστη περίμετρο.

2ο στάδιο

2.1 Το σύστημα (Σ) που περιγράφει το πρόβλημα είναι:

$$\begin{cases} x + y = \tau \\ xy = p \end{cases} \quad (\Sigma)$$

2.2 Πράξεις

2.3 Η παραβολή του τριωνύμου q(x) ή θα τέμνει σε 2 σημεία τον άξονα xx΄ ή θα εφάπτεται σε αυτόν.

2.4 Από προηγούμενα προκύπτει ότι η διακρίνουσα Δ του τριωνύμου $x^2 - \tau x + p = 0$ θα είναι μη αρνητική.

2.5 Από το προηγούμενο ερώτημα θα είναι:

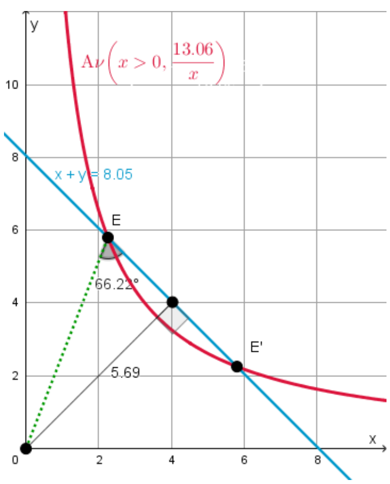
$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \tau^2 - 4p \geq 0 \Leftrightarrow \tau \geq 2\sqrt{p}$

Επομένως η ημιπερίμετρος τ ελαχιστοποιείται όταν $\tau=2\sqrt{p}$ και τότε η εξίσωση $q(x)=0$ θα έχει μία διπλή ρίζα $x=-\frac{-\tau}{2}=\frac{\tau}{2}$ και αφού $x+y=\tau\Rightarrow y=\frac{\tau}{2}$.
Επομένως, το ορθογώνιο θα είναι **τετράγωνο**.

3^{o} στάδιο

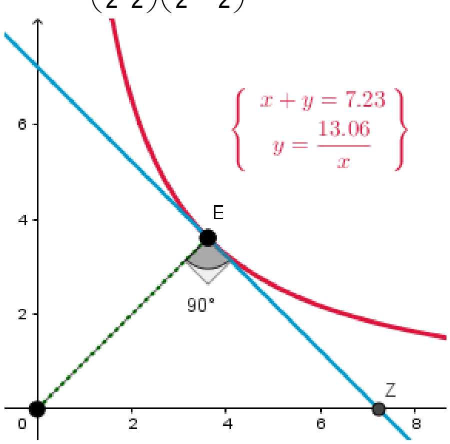
3.1 Η 1^{η} εξίσωση του (Σ) παριστάνει μία (μεταβλητή ευθεία) ενώ η 2^{η} εξίσωση μία σταθερή υπερβολή.

3.2 Οι γραφικές παραστάσεις των εξισώσεων του συστήματος φαίνονται στο επόμενο σχήμα:



3.3 Ι. Ότι εφάπτονται.
ΙΙ. Όταν τα σημεία Α και Β ταυτίζονται, τότε το σύστημα (Σ) έχει ως λύση: $x=y=\frac{\tau}{2}$, οπότε: $E\left(\frac{\tau}{2},\frac{\tau}{2}\right)$ και $Z(\tau,0)$

οπότε $\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OZ}=\left(\frac{\tau}{2},\frac{\tau}{2}\right)\left(\frac{\tau}{2},-\frac{\tau}{2}\right)=0$ και άρα: $\overrightarrow{OE}\perp\overrightarrow{OZ}$.



4^{o} στάδιο

4.1 Από την καμπύλη που διαγράφει το σημείο Τ έχει μέγιστο όταν το σημείο Β βρίσκεται στις θέσεις Ι και Κ και ελάχιστο όταν το Β είναι στη θέση .

4.2 Το **μέγιστο** εμφανίζεται σε δύο θέσεις για τις οποίες τα σημεία P, O και B είναι **συνευθειακά**. Παρατηρούμε ότι σε αυτή την περίπτωση είναι:
PA+PB=(δ-R)+(δ+R)=2δ
και επομένως αρκεί να αποδειχθεί ότι:

$$PA+PB\le 2\delta \overset{PA=x}{\underset{PA\cdot PB=p}{\Leftrightarrow}} x+\frac{p}{x}\le 2\delta\Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2+p}{x}\le 2\delta\Leftrightarrow x^2-2\delta x+p\le 0\Leftrightarrow$$

$$(x-\delta)^2+p-\delta^2\le 0\Leftrightarrow$$

$$(x-\delta)^2+\delta^2-R^2-\delta^2\le 0\Leftrightarrow$$

$$(x-\delta-R)(x-\delta+R)\le 0$$

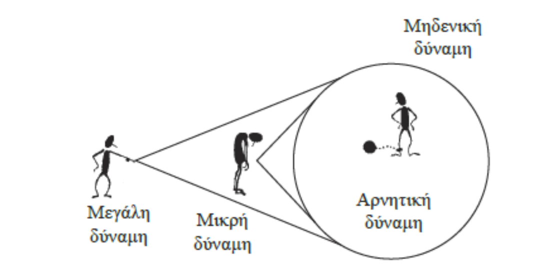
Το τελευταίο ισχύει γιατί:
$PI\le PA\le PK\Rightarrow \delta-R\le x\le \delta+R$ (Ι)
Η τελευταία σχέση στηρίζεται στην άσκηση 4 τής Ευκλείδειας Γεωμετρίας του σχολικού βιβλίου (σελ. 64) στην οποία ορίζεται η **απόσταση ενός (εξωτερικού) σημείου από έναν κύκλο**.

Έστω κύκλος (Ο,R) διαμέτρου ΑΒ και σημείο Σ της ημιευθείας ΟΑ. Για κάθε σημείο Μ του κύκλου να αποδειχθεί ότι: $ΣA\le ΣM\le ΣB$. (Το τμήμα ΣΑ λέγεται απόσταση του σημείου Σ από τον κύκλο).

5^{o} στάδιο

5.1 Τμήμα παραβολής x^2-R^2 αφού το δ μεταβάλλεται και το R είναι σταθερό.

5.2 f(δ)>0 αν και μόνο αν το P: εξωτερικό του κύκλου
f(δ)<0 αν και μόνο αν το P: εσωτερικό του κύκλου
f(δ)=0 αν και μόνο αν το P: σημείο του κύκλου



Σχήμα 20

(σελ. 202 σχολικό Ευκλείδεια Γεωμετρία)

5.3 Τμήμα παραβολής της μορφής δ^2-x^2 (αφού το R μεταβάλλεται και το δ είναι σταθερό).

5.5 Το σημείο M_1 έχει οριστεί ως εξής: $M_1(\delta,\delta^2-R^2)$. Επομένως όταν δ=σταθερό και R: μεταβαλλόμενο, το σημείο M_1 κινείται στην κατακόρυφη ευθεία x=δ που ως γνωστό δεν είναι συνάρτηση.

5.6 Ανάλογη απάντηση με το ερώτημα 5.5

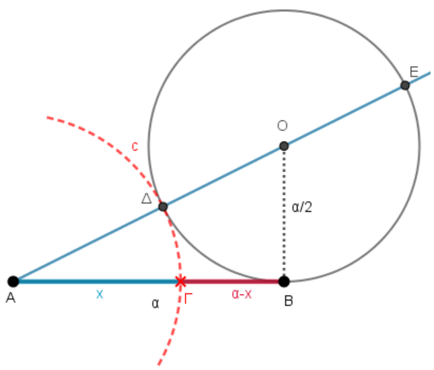
Δραστηριότητα 7

Δ7. Χρυσή τομή

1ο στάδιο

1.2 Με βάση την 1.4 της δραστηριότητας 6 θα ισχύει:

$$A\Delta\cdot AE=AB^2\Rightarrow A\Delta\cdot(A\Delta+\alpha)=\alpha^2$$



Συγκρίνοντας την τελευταία σχέση με τη σχέση

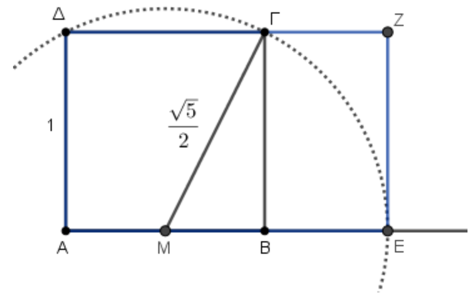
$$x(x+\alpha)=\alpha^2\Rightarrow\frac{\alpha}{x}=\frac{x+\alpha}{\alpha}\quad(1)$$

που είναι η ζητούμενη, είναι προφανές ότι το ζητούμενο τμήμα είναι το τμήμα ΑΔ. Επομένως με κέντρο Α και ακτίνα ΑΔ διαγράφουμε τόξο c που τέμνει το ΑΒ σε ένα εσωτερικό σημείο Γ. Το σημείο Γ, χωρίζει το τμήμα ΑΒ **σε μέσο και άκρο λόγο**.

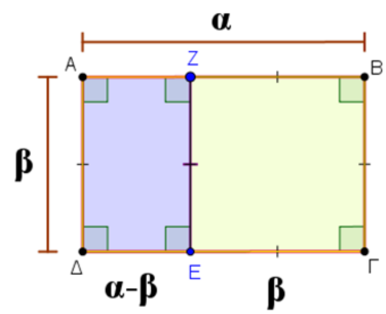
2ο στάδιο

2.3 Κατασκευάζουμε τόξο κύκλου $\left(M,\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ που τέμνει την προέκταση της πλευράς ΑΒ στο σημείο Ε. Τότε θα ισχύει ότι: $AE=AM+MB=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}=\phi$. Συνεπώς το ορθογώνιο ΑΕΖΔ είναι **χρυσό**, αφού $\frac{AE}{A\Delta}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\phi$.

2.4 Αρκεί να αποδειχθεί ότι:



$$\frac{AZ}{A\Delta}=\frac{A\Delta}{AB}\Leftrightarrow\alpha(\alpha-\beta)=\beta^2\Leftrightarrow\alpha^2=\beta(\alpha+\beta)\Leftrightarrow\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha}$$



Η τελευταία ισχύει γιατί το αρχικό ορθογώνιο είναι χρυσό (βλ. και σχέση (1)).

3.5 Αφού το ορθογώνιο ΑΖΕΔ είναι όμοιο με το ΑΒΓΔ θα είναι και αυτό **χρυσό**.

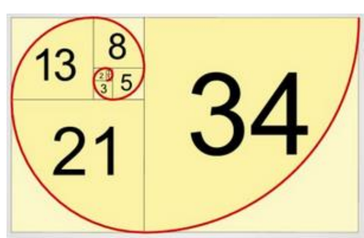
3ο στάδιο

3.1 Το 1ο τόξο κατασκευάζεται με κέντρο το σημείο Α και ακτίνα την πλευρά του τετραγώνου.

3.2 Στη συνέχεια, χωρίζοντας τα ορθογώνια που προκύπτουν (τα οποία θα είναι επίσης χρυσά) με τον ίδιο τρόπο σε ένα τετράγωνο και σε ένα ορθογώνιο, κατασκευάζουμε με τον τρόπο που προαναφέρθηκε τα τόξα εντός κάθε τετραγώνου.
Φανερά, η διαδικασία συνεχίζεται επ΄ άπειρο.

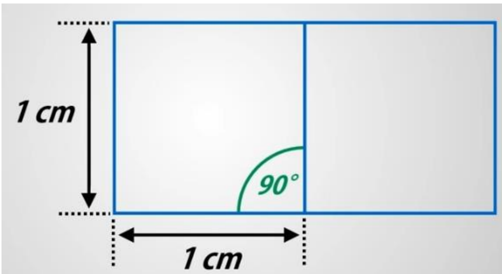
4ο στάδιο

4.1 Τα τετράγωνα του σχήματος

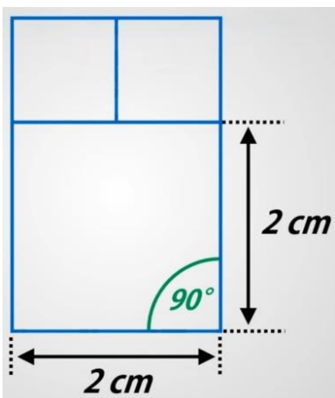


Κατασκευή

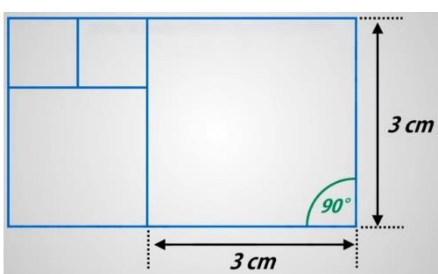
Κατασκευάζουμε τετράγωνα πλευράς 1 όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα

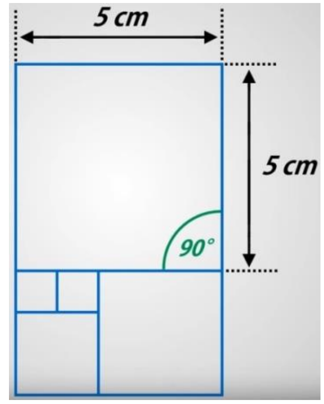


Στη συνέχεια το τετράγωνο πλευράς 2 που φαίνεται στο επόμενο σχήμα:

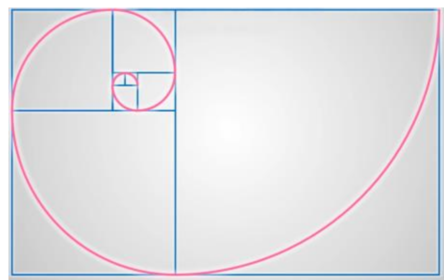


Στη συνέχεια τα τετράγωνα πλευράς 3 και 5 όπως φαίνονται στα σχήματα:

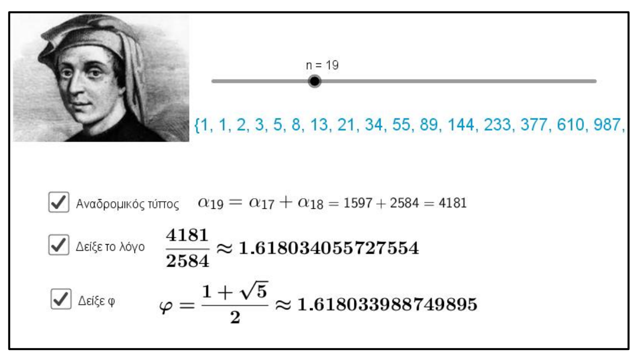




Η διαδικασία συνεχίζεται επ’ άπειρο τόσο για την κατασκευή των τετραγώνων όσο και της αντίστοιχης σπείρας εντός αυτών (επόμενο σχήμα). Είναι φανερό ότι, οι πλευρές των τετραγώνων, σχηματίζουν τους όρους της ακολουθίας Fibonacci.



4.3 Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνει το πλήθος n των όρων της ακολουθίας Fibonacci, ο λόγος δύο διαδοχικών της όρων τείνει στον αριθμό φ.



Δραστηριότητα 8

Δ8. Σταθερή περίμετρος - μέγιστο εμβαδόν

1ο στάδιο

1.1 Η περίμετρος του ορθογωνίου παραμένει σταθερό και μεταβάλλεται το εμβαδόν. Για κάθε μεταβολή του κ, ισχύει:
Ημιπερίπετρος=(3+κ)+(2-κ)=5 ή (3-κ)(2+κ)=5
Εμβαδόν=(3+κ)(2-κ) ή (3-κ)(2+κ)

1.2 Με τη Β-Δ μεταβολή μπορεί να πάρει εμβαδόν 6 όταν ΟΓ=2 και ΟΑ=3. Σχετικά με τη Ν-Α μεταβολή δεν είναι εφικτό να απαντηθεί με βεβαιότητα, αν δεν προβούμε στην επόμενη «μαθηματικοποίηση» του προβλήματος.

2ο στάδιο

2.1

Εξίσωση	Τιμές του κ	Είδος μεταβολής	
f(κ)=6	κ= 0,-1	☐ Ν-Α	☑ Β-Δ
g(κ)=6	Κ= 0,1	☐ Ν-Α	☑ Β-Δ

Για την περίπτωση: $f(\kappa)=(3+\kappa)(2-\kappa)=6 \Leftrightarrow \kappa=0$ ή $\kappa=-1$.
Όταν $\kappa=-1$ τότε $f(\kappa)=(3+\kappa)(2-\kappa)=(3-1)(2+1)=6$ και το ορθογώνιο E_2 μετασχηματίζεται Β-Δ. Ομοίως και για την περίπτωση της συνάρτησης g(κ).

2.2 Η παραβολή που διαγράφει το σημείο Ρ εκφράζει το εμβαδόν του ορθογωνίου E_2 με βάση τον τύπο f(κ). Επομένως δεν μπορεί να έχει σημεία κάτω του άξονα xx΄. Για το σκοπό αυτό θα πρέπει να ισχύει:

$$\begin{cases} 3+\kappa>0 \\ 2-\kappa>0 \end{cases} \Leftrightarrow -3<\kappa<2$$

3ο στάδιο

3.1 Από το γράφημα παρατηρούμε ότι:
$f(\kappa)=(3+\kappa)(2-\kappa)>6 \Leftrightarrow -1<\kappa<0$
Οι τιμές αυτές προκύπτουν αλγεβρικά από την επίλυση της ανίσωσης 2ου βαθμού: $(3+\kappa)(2-\kappa)>6$.

3.2 Όμοια με το ερώτημα 2.2

3.3 Παρατηρούμε ότι όταν τα σημεία Κ και Λ ταυτιστούν, το εμβαδόν E_2 μεγιστοποιείται. Αυτό συμβαίνει γιατί $M\Lambda \le MK$ (ΜΚ υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΜΛΚ) και άρα το τμήμα ΜΛ μεγιστοποιείται αν και μόνο αν τα σημεία Κ και Λ ταυτιστούν. Επομένως, σε αυτή την περίπτωση μεγιστοποιείται και το εμβαδόν E_2.

3.4 Από την προηγούμενη αναπαράσταση προκύπτει ότι το εμβαδόν E_2 μεγιστοποιείται αν και μόνο τα σημεία Κ και Λ ταυτιστούν. Τότε όμως θα είναι:
$I\Lambda=\Lambda N \Leftrightarrow AB=B\Gamma$
Και επομένως το τετράπλευρο ΟΓΒΑ θα είναι **τετράγωνο**.

Εικασία: Από όλα τα ορθογώνια E_2 που έχουν σταθερή περίμετρο, το τετράγωνο έχει το μέγιστο εμβαδόν.

4ο Στάδιο:

4.2 Η παραβολή p(x) ή θα τέμνει τον άξονα xx΄ σε 2 σημεία ή θα εφάπτεται σε αυτόν.

4.3 Θα πρέπει η διακρίνουσα Δ του τριωνύμου p(x) να είναι **μη αρνητική**.

4.4 Από την προηγούμενη παρατήρηση θα πρέπει:
$\Delta \ge 0 \Leftrightarrow 25-4E_2 \ge 0 \Leftrightarrow E_2 \le \frac{25}{4}$
Επομένως το εμβαδόν E_2 γίνεται μέγιστο αν και μόνο αν $E_2=\frac{25}{4} \Leftrightarrow \Delta=0$.

Τότε η εξίσωση $p(x)=0$ θα έχει μία διπλή ρίζα $x=\frac{5}{2}$ και αφού $x+y=5 \Rightarrow y=\frac{5}{2}$.

Επομένως θα είναι $x=y=\frac{5}{2}$ και συνεπώς το ορθογώνιο E_2 θα είναι **τετράγωνο**.

4.5 Θα είναι:
$xy=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 \ge \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ (με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $x=y$. Επομένως αφού $E_2=xy$, το εμβαδόν E_2 μεγιστοποιείται αν και μόνο το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

4.6 Προκειμένου ο Ιδιοκτήτης της έκτασης E_1 να πάρει το μέγιστο εμβαδόν στην ανταλλαγή του με το Δήμο της περιοχής, θα πρέπει να μετασχηματίσει βορειοδυτικά την αρχική έκταση του, όπως περιγράφεται στο επόμενο σχήμα.

Δραστηριότητα 9

Δ9. Ο «τετραγωνισμός» του κύκλου

1.Μήκος ημικυκλίου= πR .

2,3. Η μέση ανάλογος των τμημάτων $A'E=\beta$ και $EK=R$ είναι ένα τμήμα x με την ιδιότητα: $x^2=\beta\cdot R$. Για την κατασκευή της, θεωρούμε το ημικύκλιο διαμέτρου

$A'K=\beta+R$ και στο σημείο Ε, θεωρούμε την κάθετη ΕΝ στο Α΄Κ. Τότε θα ισχύει ότι: $EN^2=\beta\cdot R$ (1)

Φανερά, δοθέντων δύο ευθυγράμμων τμημάτων, είναι πάντα δυνατή η κατασκευή της μέσης αναλόγου αυτών.

4. Όταν το σημείο Μ συμπέσει με το σημείο Α΄, τότε η σχέση (1) διαμορφώνεται:

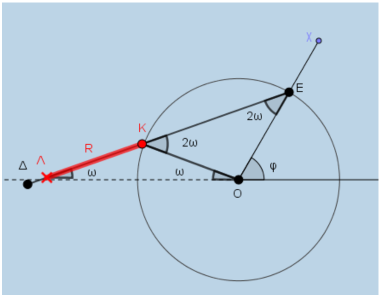
$EN^2=\pi R\cdot R=\pi R^2$.

5. Όταν το σημείο Μ συμπέσει με το σημείο Α΄, τότε το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς ΕΝ ισούται με το εμβαδόν του κύκλου c.

6. Το ευθύγραμμο τμήμα $OO'=\beta$ του οποίου το μήκος ισούται με το μήκος του τόξου ΑΑ΄, **δεν** μπορεί να κατασκευαστεί με κανόνα και διαβήτη.

Δραστηριότητα 10

Δ10. Η τριχοτόμηση της γωνίας – Μέθοδος Αρχιμήδη



1.Είναι $K\Lambda=KO=R$ και επομένως το τρίγωνο ΚΛΟ είναι ισοσκελές. Επομένως θα ισχύει $E\hat{K}O=2\omega$ ως εξωτερική γωνία του τριγώνου ΚΛΟ.

2. Το τρίγωνο ΚΟΕ είναι επίσης ισοσκελές με

$OK=OE=R$ και επομένως από το τρίγωνο ΕΟΛ θα ισχύει:

$\phi=O\hat{E}\Lambda+E\Lambda O=3\omega$ (ως εξωτερική του τριγώνου ΕΟΛ).

Επομένως η γωνία $E\Lambda O=\frac{1}{3}\phi$.

3. Η κατασκευή του τμήματος ΚΛ, δηλαδή ενός τμήματος ίσο με την ακτίνα R του κύκλου (O,R).

Δραστηριότητα 11

Δ11. Η έννοια της συνάρτησης μέσω στοιχειωδών γεωμετρικών ιδιοτήτων

1ο στάδιο

1.1 Οι αποστάσεις h και d του αυτοκινήτου από το σημείο Α και την Πόλη1.

1.2 Το σημείο Μ έχει συντεταγμένες (h,d) .

1.3 Παρατηρήστε ότι αρχικά οι τιμές του d μειώνονται όσο αυξάνει το h. Στη συνέχεια συμβαίνει το αντίστροφο.

2ο στάδιο

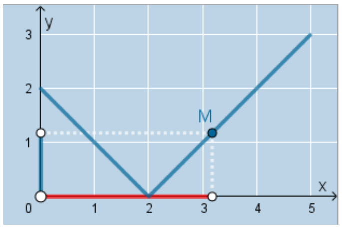
2.1 Το σημείο Ν έχει συντεταγμένες (q,d) .

2.2 Η κατακόρυφη ευθεία (ε) τέμνει το γράφημα του σημείου Μ το πολύ σε ένα σημείο για κάθε διάταξη των σημείων Α, Β και Π1, ενώ το γράφημα του σημείου Ν σε δύο σημεία (εκτός εξαιρέσεων).

2.3 Το γράφημα του σημείου Μ αντιστοιχεί σε γράφημα συνάρτησης, ενώ του σημείου Ν δεν αντιστοιχεί σε γράφημα συνάρτησης.

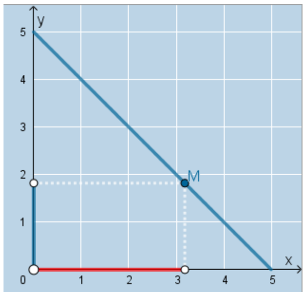
3ο στάδιο (Γεωμετρική επέκταση)

3.1 Πρόκειται για τεθλασμένη γραμμή από τμήματα ευθειών.

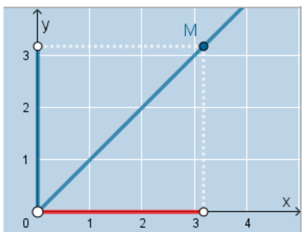


3.2 Στις περιπτώσεις που το σημείο «Πόλη1» ταυτιστεί με το σημείο Α ή το σημείο Β, το γράφημα του σημείου Μ είναι τμήμα ευθείας. Σε αυτές τις περιπτώσεις ισχύει ότι $d(h)=AB-h$, ΑΒ: σταθερό (Σχήμα Ι) ή $d(h)=h$

(Σχήμα ΙΙ). Και στις δύο περιπτώσεις με $0 \le h \le AB$ οι τύποι είναι της μορφής $y = \alpha x + \beta$, δηλαδή τμήματα ευθειών.

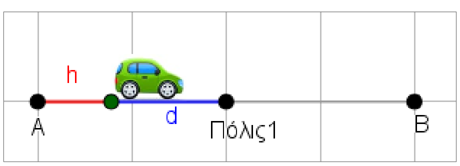


Σχήμα Ι



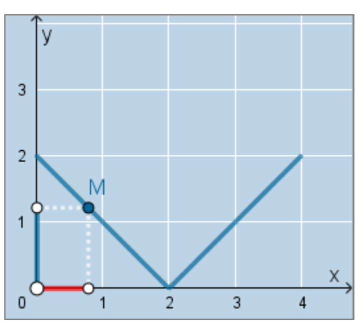
Σχήμα ΙΙ

3.3 Αν καλέσουμε $\alpha = \frac{AB}{2}$ τότε θα ισχύει ότι:



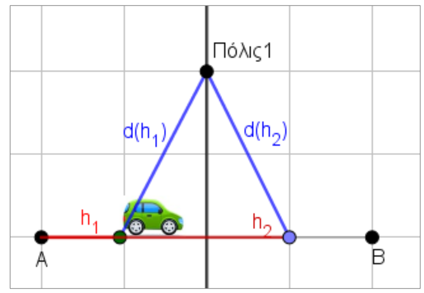
$$d(h) = \begin{cases} \alpha - h, & 0 \le h < \alpha \\ h - \alpha, & \alpha \le h \le 2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow d(h) = |h - \alpha|, 0 \le h \le 2\alpha$$

Επομένως η γραφική παράσταση θα είναι η εικονιζόμενη.



[18] **Σχόλιο:** Το σημείο αυτό μπορεί να αποτελέσει αφορμή για την ιδιότητα 1-1 μίας συνάρτησης και κατ΄ επέκταση τής άρνησής της.

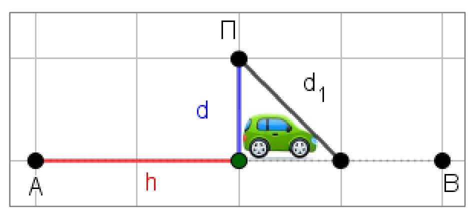
3.4 Όταν το σημείο Πόλη1 τοποθετηθεί σε οποιοδήποτε σημείο της μεσοκαθέτου του ΑΒ, τότε η καμπύλη του σημείου Μ είναι συμμετρική ως προς κάποια κατακόρυφη ευθεία. Επομένως, αν $AB = 4$ τότε η γραμμή του σημείου Μ είναι συμμετρική ως προς την ευθεία $x = 2$.



Ερμηνεία:
Για κάθε θέση h_1 του αυτοκινήτου, υπάρχει άλλη μία h_2 συμμετρική ως προς τη μεσοκάθετο για την οποία ισχύει:. $d(h_1) = d(h_2)$, αφού κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ισαπέχει από τα άκρα Α και Β.[18]

3.5 Ι. Παρατηρούμε ότι το σημείο Μ είναι το *«πιο χαμηλό σημείο της γραφικής παράστασης»*[19].

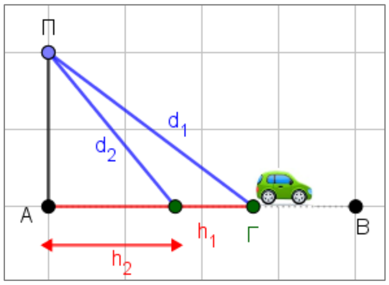
ΙΙ. Αναζητάμε τη θέση του αυτοκινήτου ώστε να έχουμε το ελάχιστο d. Αυτό συμβαίνει όταν $\Pi\Gamma \perp AB$ αφού σε κάθε άλλη θέση το d θα είναι **πλάγιο** τμήμα και άρα θα ισχύει: $d_1 > d$.



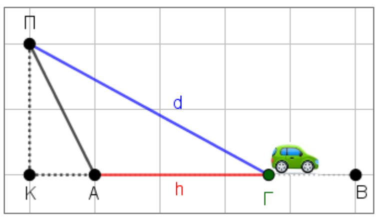
3.6 Στις περιπτώσεις των επόμενων σχημάτων με $\Pi A\Gamma = 90^\circ$, για κάθε θέση του αυτοκινήτου θα ισχύει ότι:

Για δύο τυχαία $h_1 > h_2$ θα είναι και $d_1 > d_2$ (ως γνωστό, όσο το ίχνος ενός πλάγιου τμήματος απέχει περισσότερο από το ίχνος της **καθέτου** σε ένα ευθ. τμήμα, τόσο μεγαλύτερο είναι το πλάγιο τμήμα).

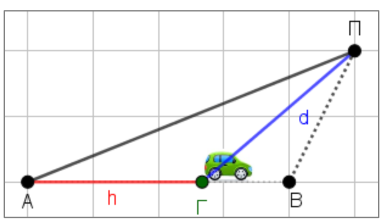
[19] **Σχόλιο:** Το συγκεκριμένο ερώτημα θέτει την έννοια του ελαχίστου μίας συνάρτησης.



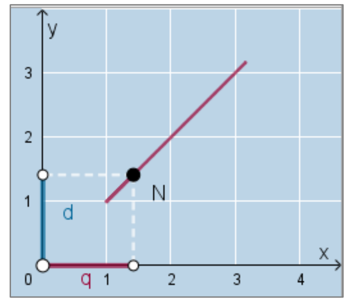
Τέλος στην περίπτωση να είναι $\Pi\hat{A}\Gamma > 90^\circ$ που αποτελεί επίσης λύση του προβλήματος, η απόδειξη είναι αντίστοιχη (θεωρήστε τμήμα $\Pi K \perp AB$ και χρησιμοποιήστε την προηγούμενη ιδιότητα).



3.7 Αντίστοιχα με το ερώτημα 3.5, θα πρέπει να έχουμε τη διάταξη του επόμενου σχήματος με $\Pi\hat{B}A \geq 90^\circ$. Η αιτιολόγηση είναι αντίστοιχη με το προηγούμενο ερώτημα.



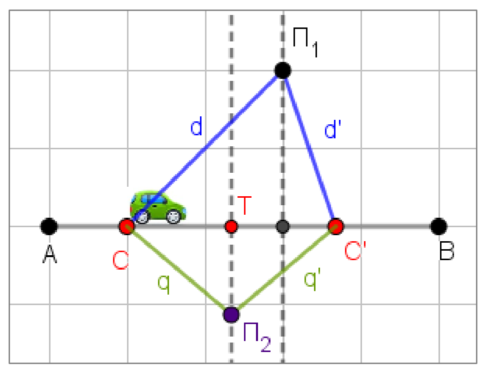
3.8 Σε αυτή την περίπτωση παρατηρούμε ότι το γράφημα του σημείου Ν είναι γράφημα συνάρτησης (αφού κάθε κατακόρυφη ευθεία, θα τέμνει το γράφημα το πολύ σε ένα σημείο).



Ερμηνεία: Στην περίπτωση που η ευθεία ΑΒ είναι μεσοκάθετος του $\Pi_1\Pi_2$ θα ισχύει ότι $d = q$ (αφού το σημείο Γ ανήκει στην ΑΒ). Επομένως το γράφημα του σημείου Ν, θα είναι τμήμα του γραφήματος της συνάρτησης $y = x$ (ταυτοτική συνάρτηση).

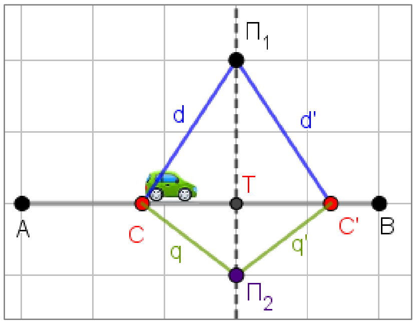
3.9 Θεωρούμε το συμμετρικό σημείο C΄ του σημείου C ως προς την ευθεία Π_2T η οποία είναι κάθετη στην ευθεία ΑΒ. Τότε σε αυτή την περίπτωση θα είναι $d \neq d'$ και $q = q'$ (εφόσον η ευθεία $\Pi_1\Pi_2$ δεν είναι κάθετη στην ΑΒ). Επομένως για δύο ίσες ανεξάρτητες μεταβλητές q και q' θα έχουμε διαφορετικές εξαρτημένες μεταβλητές d και άρα το γράφημα $N(q,d)$ δεν θα είναι γράφημα συνάρτησης. [20]

Σχόλιο: Το ίδιο θα ισχύει και όταν η θέση C΄ είναι εκτός του τμήματος ΑΒ.



3.10 Από το προηγούμενο ερώτημα είναι άμεσο ότι για να είναι το γράφημα του σημείου Ν, γράφημα συνάρτησης θα πρέπει η ευθεία $\Pi_1\Pi_2$ να είναι κάθετη στην ευθεία ΑΒ.

[20] Από την ανάλυση που προηγήθηκε και αιτιολογεί γεωμετρικά γιατί το γράφημα του σημείου Ν **δεν είναι γράφημα συνάρτησης**, γίνεται αντιληπτή η δυναμική τής Ευκλείδειας Γεωμετρίας στην κατεύθυνση της ερμηνείας αλλά και αιτιολόγησης θεμάτων όπως αυτό που περιγράφηκε.



Σε αυτή την περίπτωση, για κάθε θέση του αυτοκινήτου C, θα υπάρχουν οι αντίστοιχες συμμετρικές C’ ως προς την ευθεία $Π_1Π_2$ για τις οποίες (λόγω συμμετρίας) θα ι-σχύει :

Αν $q = q' \Rightarrow d = d'$, που σημαίνει ότι $d(q) = d(q')$.

Άρα, η συμμεταβολή d(q) θα είναι συνάρτηση.

Σχόλιο 1: Γενικά, η σχέση $f : A \to \mathbb{R}$ θα είναι συνάρτηση αν και μόνο αν:

Για κάθε $\alpha, \beta \in A$ με $\alpha = \beta \Rightarrow f(\alpha) = f(\beta)$.

Σχόλιο 2: Στα προηγούμενα, παρουσιάστηκε μία ικανή συνθήκη, ώστε η συμμεταβολή d(q) να είναι συνάρτηση. Επομένως, τίθεται ως επακόλουθο ερώτημα, αν είναι και **αναγκαία**. Με άλλα λόγια αν υπάρχουν και άλλες διατά-ξεις των σημείων Α, Β, $Π_1$ και $Π_2$ ώστε η συμμεταβολή d(q) να είναι συνάρτηση.

Τέλος σε καταφατική περίπτωση, αν είναι δυνατή η εύ-ρεση όλων αυτών των θέσεων.

3.11 Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε h_1, h_2 με $h_1 = h_2$ θα είναι $d(h_1) = d(h_2)$.

Όμως για κάθε διάταξη των σημείων Α,Β και $Π_1$ αν ισχύει ότι $h_1 = h_2$, τότε υποχρεωτικά οι αντίστοιχες θέσεις του αυτοκινήτου θα ταυτίζονται στο δρόμο ΑΒ. Επομένως υ-ποχρεωτικά, θα είναι και $d(h_1) = d(h_2)$.