ESPACIO MÉTRICO

Índice:

1. Espacio métrico

Dado un conjunto M, cuyos elementos denominamos puntos, llamamos **distancia o métrica** en M a cualquier aplicación:

$$\begin{array}{l} d: M\ X\ M \rightarrow \mathbb{R}^{+} \cup \{0\} \\ \quad (A,B) \rightarrow d(A,B) \end{array}$$

Que verifique las siguientes propiedades:

$$d(A,B)=d(B,A)\ \forall\ A,B\in M$$

$$d(A,B)=0 \Leftrightarrow A=B$$

$$d(A,B)\leq d(A,C)+d(C,B)\ \forall\ A,B,C\in M$$

En particular en el espacio afín podemos utilizar como distancia, la distancia euclídea, que podemos definir:

Si $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ son dos puntos del espacio, llamamos distancia euclídea a

$$d(A,B)=|\overrightarrow{AB}|=+\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

 # Ejemplos.-

- *Si* $A=(1,2,4)$ *y* $B=(3,4,3)$ *, se cumplirá*

$$d(A,B)=\sqrt{(3-1)^2+(4-2)^2+(3-4)^2}=\sqrt{9}=3$$

- *Si* $A=(3,0,2)$ *y B es un punto de la bisectriz del primer cuadrante del plano XY, y sabemos que está a una distancia de A de tres unidades, como la recta paramétrica de dicha bisectriz tendrá por ecuaciones:*

$$r: \begin{pmatrix} x=t \\ y=t \\ z=0 \end{pmatrix}$$

$B(t,t,0)$ *será el afijo del punto B, para algún t determinado. Y como*

$$d(A,B)=\sqrt{(t-3)^2+(t-0)^2+(0-2)^2}=3 \Rightarrow t^2-3t+2=0 \Rightarrow t=\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

Luego $B=(1,1,0)$ *ó* $B=(2,2,0)$

Denominamos **espacio métrico** al espacio euclideo en el que hemos definido una aplicación distancia.

2. Distancia de un punto a un plano. Distancia entre planos paralelos

Si $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ es un plano y $P(x_{0,}y_{0,}z_0)$ un punto del espacio, Si denominamos M al punto de proyección de P sobre π, como se cumplirá

$$P\in r:\begin{cases} x=x_0+At \\ y=y_0+Bt \\ z=z_0+Ct \end{cases} \qquad r\perp\pi \qquad M\in r\cap\pi$$

Luego, si $M(x_0+At,\, y_0+Bt,\, z_0+Ct)$ para algún $t\in\mathbb{R}$, se cumplirá la ecuación

$$\pi: A(x_0+At)+B(y_0+Bt)+C(z_0+Ct)+D=0 \Rightarrow t_1=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{A^2+B^2+C^2}$$

Que sustituyendo el valor de t_1, las coordenadas del punto M, serán

$$M(x_0+At_1,\, y_0+Bt_1,\, z_0+Ct_2)=$$

$$M\left(x_0+A\left(-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{A^2+B^2+C^2}\right),\, y_0+B\left(-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{A^2+B^2+C^2}\right)+z_0+C\left(-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{A^2+B^2+C^2}\right)\right)$$

Y por tanto

$$d^2(P,\pi)=d^2(P,M)=\left((x_0+At_1-x_0)^2+(y_0+Bt_1-y_0)^2+(z_0+Ct_2-z_0)^2\right)=$$
$$=(A^2+B^2+C^2).\,t_1^2=(A^2+B^2+C^2).\left(\frac{-Ax_0+By_0+Cz_0+D}{A^2+B^2+C^2}\right)^2=$$
$$=\frac{(Ax_0+By_0+Cz_0+D)^2}{A^2+B^2+C^2}$$

Luego

$$d(P,\pi)=d(P,M)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Por tanto, si $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ **es un plano y** $P(x_{0,}y_{0,}z_0)$ **será:**

$$d(P,\pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Hay que observar que si $P\in\pi$, como $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$ será $d(P,\pi)=0$.

 # Ejemplo.- Dados el punto $A(3,2,3)$ *y el plano de ecuación* $\pi: 2x-4y+2z+2=0$, *se cumplirá:*

$$d(A,\pi)=\frac{|2.3-4.2+2.3+2|}{\sqrt{2^2+(-4)^2+2^2}}=\frac{6}{\sqrt{24}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

Si $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ y $\pi': Ax+By+Cz+D'=0$ son dos planos paralelos y $P(a,b,c)\in\pi$, como se cumplirá

$$d(P,\pi')=d(\pi,\pi')=\frac{|Aa+Bb+Cc+D'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|D'-D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Por tanto, si $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ y $\pi': Ax+By+Cz+D'=0$ son dos planos paralelos, se cumplirá

$$d(\pi,\pi')=\frac{|D'-D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

 # Ejemplo.- La distancia entre los planos

$$\pi: x-2y+2z+7=0$$

$$\pi': x-2y+2z-7=0$$

es

$$d(\pi,\pi')=\frac{|(-7)-7|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{14}{3}$$

3. Distancia de un punto a una recta.

La distancia de un punto P a una recta r es la distancia entre el punto P y el punto M de r, tal que M es la proyección ortogonal de P sobre r.

Es decir, si $r:\begin{cases} x=a_1+\lambda_1 t \\ y=a_2+\lambda_2 t \\ z=a_3+\lambda_3 t \end{cases}$ es una recta y $P(x_{0,}y_{0,}z_0)$ un punto del espacio, como

$$\pi:\lambda_1.(x-x_0)+\lambda_2.(y-y_0)+\lambda_3.(z-z_0)=0$$

Es el plano perpendicular a r, que pasa por P ($\pi\perp r$, $P\in\pi$).

Para calcular $M=\pi\cap r$, resolvemos la ecuación:

$$\lambda_1.(a_1+\lambda_1.t-x_0)+\lambda_2.(a_2+\lambda_2.t-y_0)+\lambda_3.(a_3+\lambda_3.t-z_0)=0$$

Que despejando t, de dicha ecuación y sustituyendo en r, obtenemos el punto M, y se cumplirá

$$d(P,r)=d(P,M)$$

 # Ejemplo.- Si $r:\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-2t \\ z=1+t \end{cases}$ *es una recta y* $P(2,-1,2)$ *un punto del espacio, como*

$$\pi:2.(x-2)+(-2).(y+1)+1.(z-2)=0\Rightarrow 2\mathrm{x}-2\mathrm{y}+z-8=0$$

Es el plano perpendicular a r, que pasa por P ($\pi\perp r$ *y* $P\in\pi$ *).*

Para calcular $M=\pi\cap r$ *, resolvemos la ecuación:*

$$2.((-1+2\mathrm{t})-2)+(-2).((-2\mathrm{t})+1)+1.((1+t)-2)=0\Rightarrow 9t-9=0\Rightarrow t=1$$

Que despejando t, de dicha ecuación y sustituyendo en r, obtenemos el punto M(1,-2,2) y se cumplirá

$$d(P,r)=d(P,M)=\sqrt{(1-2)^2+(-2-(-1))^2+(2-2)^2}=\sqrt{2}$$

 # Ejemplo.- Hallar el valor a, para que la distancia del punto $P(4,2,4)$ *a una recta contenida en el plano* XY *, que pasa por el punto* $B(a,0,0)$ *y que es paralela al eje Y, sea cinco.*

Como la recta r tiene por vector $\vec{v}=(0,1,0)$ *y pasa por el punto B, tendrá por ecuación paramétrica:* $r:\begin{cases} x=a \\ y=t \\ z=0 \end{cases}$

El plano perpendicular a r *que pasa por P, tendrá por ecuación*

$$0.(x-4)+1.(y-2)+0.(z-4)=0 \Rightarrow y-2=0$$

Y el punto de intersección de π *y* P *, será el punto de la recta que cumple* $t=2$ *. Es decir:*

$$M=M(a,2,0)$$

Y dado que

$$d(P,r)=d(P,M)=\sqrt{(4-a)^2+(2-2)^2+(4-0)^2}=\sqrt{(4-a)^2+4^2}=5$$

Obtenemos:

$$(4-a)^2+4^2=25 \Rightarrow a^2-8a+7=0 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} a_1=1 \\ a_2=7 \end{matrix}\right\}$$

4. Distancia de un plano a una recta.

La distancia de un plano π a una recta r paralela a él es la distancia de un punto cualquiera P de r al plano π .

 # Ejemplo.- Si $r:\begin{cases} x=1-2t \\ y=2-2t \\ z=1-t \end{cases}$ *es una recta, como el plano* $\pi : x-2y+2z-4=0$ *, es un plano paralela a la recta r.*

Para calcular la distancia de r a π *, tomamos un punto cualquiera de r, por ejemplo,* $P(1,2,1)$ *(*haciendo t = 0*), y será:*

$$d(r,\pi)=d(P,\pi)=\frac{|1-2.2+2.1-4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{5}{3}$$

 # Ejemplo.- Para calcular la distancia de la recta bisectriz del ángulo que forman los ejes coordenados X e Y, y el plano $\pi : z=a$ *en función del valor a.*

Como el vector director de la recta bisectriz es $\vec{v}=(1,1,0)$ *y el vector normal al plano es* $\vec{d}=(0,0,1)$ *. Y como* $\vec{v}$ *y* $\vec{d}$ *son ortogonales, la recta y el plano son paralelos.*

Luego, tomando un punto cualquiera de r, por ejemplo el origen de coordenadas $O(0,0,0)$ *, se cumplirá*

$$d(r,\pi)=d(O,\pi)=\frac{|0+0+0-a|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=a$$

5. Distancia entre dos rectas.

Para estudiar la distancia entre dos rectas, puede suceder:

- Que sean coincidentes o secantes, y por tanto su distancia será nula,
- Que sean paralelas.
- Que se crucen.

Distancia entre dos rectas paralelas.

La distancia entre dos rectas paralelas es la distancia de un punto cualquiera de una de ellas a la otra recta, es decir:

Si r, r' son dos rectas paralelas: $d(r,r')=d(P,r')$ donde $P\in r$

 # Ejemplo.- Dadas las rectas

$$r:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+3}{2} \qquad y \qquad r':\frac{x+2}{2}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-4}{4}$$

Como tiene por vectores directores $\vec{u}=(1,2,2)$ *y* $\vec{v}=(2,4,4)$ *que son proporcionales; por tanto las rectas son paralelas y distintas (*ya que por ejemplo el punto $P(0,1,-3)$ de r , no pertenece a r' *),*

El plano π *perpendicular a* r' *que pasa por P, tiene por ecuación*

$$2.(x-0)+4.(y-1)+4.(z+3)=0 \Rightarrow 2.x+4.y+4.z+8=0 \Rightarrow x+2.y+2.z+4=0$$

Tomando las ecuaciones paramétricas de la recta $r':\left\{\begin{array}{l} x=-2+2t \\ y=4+4t \\ z=4+4t \end{array}\right\}$ *, y sustituyendo las coordenadas de un punto de* r' *, en las ecuaciones del plano* π *en las ecuaciones del plano* π *para obtener el punto M, obtenemos*

$$(-2+2t)+2.(4+4t)+2.(4+4t)+4=0 \Rightarrow 18t+18=0 \Rightarrow t=-1$$

Que sustituyendo t, obtenemos

$$M(-4,0,0)$$

Y será:

$$d(r,r')=d(P,M)=d(P(0,1,-3),M(-4,0,0))=\sqrt{(-4)^2+(-1)^2+3^2}=\sqrt{26}$$

También se puede hallar la distancia entre dos rectas paralelas r y r' , tomando un plano perpendicular a ambas y hallando la distancia entre los puntos de intersección del plano con cada recta.

Distancia entre dos rectas que se cruzan.

La distancia entre dos rectas que se cruzan es la distancia de un punto cualquiera de una de ellas al plano paralelo que contiene a la otra recta, es decir:

Si r, r' son dos rectas que se cruzan:

$$d(r, r') = d(P, \pi) \quad \text{donde} \quad P \in r, r' \subset \pi, r \,||\, \pi$$

 # Ejemplo.- Dadas las rectas

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{2} \qquad y \qquad r': \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$$

Como tiene por vectores directores $\vec{u} = (2,1,2)$ *y* $\vec{v} = (1,2,1)$ *,* r *y* r' *no son paralelas, Si además consideramos el vector* $\vec{w} = \overrightarrow{PQ}$ *, donde* $P(1,0,3) \in r$ *y* $Q(2,1,-1) \in r'$ *.*

Como $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ *es un conjunto linealmente independiente, por tener determinante no nulo, es decir*

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2-1 & 1-0 & -1-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -15 \qquad \textit{(vectores filas)}$$

Las rectas r *y* r' *se cruzan.*

Para hallar la distancia entre ambas rectas, hallamos el plano paralelo a r *y que contiene a* r' *. Dicho plano, tendrá de vectores directores* $\vec{u} = (2,1,2)$ *y* $\vec{v} = (1,2,1)$ *, y como tiene que contener a* r' *, tomando un punto cualquiera de* r' *, por ejemplo* $Q(2,1-1)$ *, obtenemos la ecuación del plano* π *:*

$$\pi: \begin{vmatrix} 2 & 1 & x-2 \\ 1 & 2 & y-1 \\ 2 & 1 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3x + 3z + 9 = 0 \Rightarrow x - z - 3 = 0 \qquad \textit{(vectores columnas)}$$

Luego

$$d(r, r') = d(P(1,0,3), x - z - 3 = 0) = \frac{|1-3-3|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5.\sqrt{2}}{2}$$

6. Producto vectorial.

Dados dos vectores $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$, definimos **producto vectorial de** $\vec{u}$ **por** $\vec{v}$, y lo expresamos como $\vec{u}\wedge\vec{v}$ o $\vec{u}\times\vec{v}$ al vector:

$$\vec{u}\times\vec{v}:\left(\begin{vmatrix}u_2 & u_3\\ v_2 & v_3\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}u_1 & u_3\\ v_1 & v_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{vmatrix}\right)$$

Teniendo en cuenta $\vec{u}\times\vec{v}$ lo podemos expresar respecto de la base canónica $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$, como

$$\vec{e}_1.\begin{vmatrix}u_2 & u_3\\ v_2 & v_3\end{vmatrix}-\vec{e}_2.\begin{vmatrix}u_1 & u_3\\ v_1 & v_3\end{vmatrix}+\vec{e}_3.\begin{vmatrix}u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{vmatrix}$$

Podemos expresar $\vec{u}\times\vec{v}$, como

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}e_1 & e_2 & e_3\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}$$

 # Ejemplo.- Dados los vectores $\vec{u}=(2,3,1)$ *y* $\vec{v}=(1,2,1)$

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}e_1 & e_2 & e_3\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=\vec{e}_1.(3-2)-\vec{e}_2.(2-1)+\vec{e}_3.(4-3)=\vec{e}_1-\vec{e}_2+\vec{e}_3=(1,-1,1)$$

Algunas propiedades del producto vectorial son:

- Anticonmutativa: $\vec{u}\times\vec{v}=-(\vec{v}\times\vec{u})$
- Distributiva del producto vectorial respecto de la suma de vectores

  $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}$
- $\lambda.(\vec{u})\times\vec{v}=\lambda.(\vec{u}\times\vec{v})=\vec{u}\times(\lambda\vec{v})$
- $\vec{u}\times\vec{v}\perp\vec{u}\ y\ \vec{u}\times\vec{v}\perp\vec{v}$
- $|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}|.|\vec{v}|\,sen(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

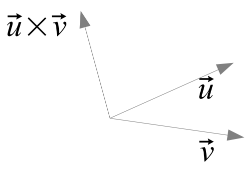
Además:

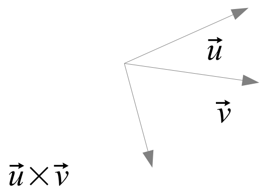
$|\vec{u}\times\vec{v}|$ = área del paralelogramo $\{\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}\}$, donde $\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}$ son vectores equivalentes a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ respectivamente.

 # Ejemplo.- Dados los puntos A=(0,1,-1), B=(-2,4,2) y C=(-2,0,0) , el área del triángulo de Vértices A, B, y C, será

$$\frac{1}{2}.|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}.\left\|\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -2 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}\right\|=\frac{1}{2}.|(6,-4,8)|=\frac{1}{2}.\sqrt{6^2+(-4)^2+8^2}=\sqrt{29}$$

Los vectores $\vec{u}\times\vec{v}$ y $\vec{v}\times\vec{u}$ son ortogonales a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, pero $\vec{u}\times\vec{v}$ tiene orientación positiva $\vec{v}\times\vec{u}$ tiene orientación negativa. Decimos que $\vec{u}\times\vec{v}$ tiene orientación positiva cuando $Determinante(\{\vec{u}\,\vec{v}\,\vec{u}\times\vec{v}\})>0$, o también decimos que sigue la regla del sacacorchos.





7. Producto mixto de tres vectores.

Denominamos **producto mixto de los vectores** $\vec{u}$ **,** $\vec{v}$ **y** $\vec{w}$ **,** al número

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\vec{u}\bullet(\vec{v}\times\vec{w})=(u_1,u_2,u_3)\bullet\left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix},-\begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}\right)=$$

$$=u_1.\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}-u_2.\begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}+u_3.\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Además, cumple las siguientes propiedades:

- $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\vec{u}\bullet(\vec{v}\times\vec{w})=(\vec{v}\times\vec{w})\bullet\vec{u}=[\vec{v},\vec{w},\vec{u}]$
- Si $\vec{u}=\vec{0}$ o $\vec{v}=\vec{0}$ o $\vec{w}=\vec{0}$, entonces $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=0$
- $[\vec{a}+\vec{b},\vec{v},\vec{w}]=(\vec{a}+\vec{b})\bullet(\vec{v}\times\vec{w})=\vec{a}\bullet(\vec{v}\times\vec{w})+\vec{b}\bullet(\vec{v}\times\vec{w})=[\vec{a},\vec{v},\vec{w}]+[\vec{b},\vec{v},\vec{w}]$

Además, como

$$|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]|=|\vec{u}\bullet(\vec{v}\times\vec{w})|=||\vec{u}|.|\vec{v}\times\vec{w}|.\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}\times\vec{w}})|$$

Y teniendo en cuenta que $|\vec{u}\times\vec{v}|$ = área del paralelogramo de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ respectivamente. Y que $||\vec{u}|.\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}\times\vec{w}})|$ es la altura del paralelepípedo formado por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, será $|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]|$ el volumen del paralelepípedo formado por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

 # Ejemplo.- Dados los vectores $\vec{u}=(1,3,3)$, $\vec{v}=(-2,3,1)$ *y* $\vec{w}=(-1,2,1)$

El volumen del paralelepípedo generado por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ *y* $\vec{w}$ *, será el área de la base generada por los vectores* $\vec{v}$, $\vec{w}$ *, es decir* $B=|\vec{v}\times\vec{w}|$ *por la altura* $h=|\vec{u}||\cos\{\widehat{\vec{u},\vec{v}\times\vec{w}}\}|$ *. Es decir:*

$$h.B=|\vec{u}|.|\vec{v}\times\vec{w}|.|\cos\{\widehat{\vec{u},\vec{v}\times\vec{w}}\}|=|\vec{u}\bullet\vec{v}\times\vec{w}|=|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]|=\left|\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}\right|=|1|=1$$

Teniendo en cuenta que el volumen del tetraedro generado por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ *y* $\vec{w}$ *, es* $\frac{1}{3}$ *del área de la base* $\frac{1}{2}.B$ *, por la altura h, será:*

$$\frac{1}{3}.h.\left(\frac{1}{2}.B\right)=\frac{1}{6}|\vec{u}|.|\vec{v}\times\vec{w}|.|\cos\{\widehat{\vec{u},\vec{v}\times\vec{w}}\}|=\frac{1}{6}.|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]|=\frac{1}{6}.|1|=\frac{1}{6}$$

8. **Perpendicular común a dos rectas que se cruzan**.

Para calcular la recta perpendicular a dos rectas r y r' que se cruza, si vector $\vec{u}$ y vector $\vec{v}$ son los vectores directores respectivamente de r y r', calculamos el vector $\vec{w}$ ortogonal a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$, es decir $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}$, y el punto P, intersección del plano π perpendicular a r que contiene a r'. La recta buscada vendrá generada por el punto P y el vector $\vec{w}$.

 # Ejemplo.- Dadas las rectas que se cruzan (se deja como ejercicio)

$$r:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1} \qquad y \qquad r':\frac{x+1}{-3}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-1}{1}$$

Como tiene por vectores directores $\vec{u}=(2,1,1)$ *y* $\vec{v}=(-3,2,1)$, r *y* r' *no son paralelas, Si además consideramos el vector* $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}=(-1,-5,7)$.

Como el plano π *que contiene a* r *y la recta perpendicular común tiene de ecuación:*

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -5 & 7 \\ x-1 & y & z-1 \end{vmatrix}=12x-15y-9z-3=0 \qquad \textit{(vectores filas)}$$

Como las ecuaciones paramétricas de r' *son:*

$$\left\{\begin{array}{l} x=-1-3t \\ y=4+2t \\ z=1+t \end{array}\right\}$$

Hallando la intersección P de π *y* r' *tenemos:*

$$12(-1-3t)-15(4+2t)-9(1+t)-3=0 \Rightarrow t=-28$$

Y sustituyendo t en las coordenadas de r', obtenemos

$$P(-1-3.(-28),4+2.(-28),1+(-28)) \quad = \quad P(83,-52,-27) \quad .$$

Luego la recta perpendicular a r *y* r' *es la recta:*

$$s:\frac{x-83}{-1}=\frac{y+52}{-5}=\frac{z+27}{7}$$