11.3. DETERMINACIÓN DEL MOVIMIENTO DE UNA PARTÍCULA

En la sección anterior se afirma que el movimiento de una partícula es conocido si se sabe la posición de la partícula para todo valor del tiempo t. En la práctica, sin embargo, un movimiento rara vez se define por medio de una relación entre x y t. Con mayor frecuencia, las condiciones del movimiento se especificarán por el tipo de aceleración que posee la partícula. Por ejemplo, un cuerpo en caída libre tendrá una aceleración constante, dirigida hacia abajo e igual a 9.81 m/s^2, o 32.2 ft/s^2; una masa unida a un resorte que se ha estirado tendrá una aceleración proporcional a la elongación instantánea del resorte, medida desde la posición de equilibrio, etc. En general, la aceleración de la partícula puede expresarse como una función de una o más de las variables x, v y t. Para determinar la coordenada de la posición x en términos de t, será necesario efectuar dos integraciones sucesivas.

Se considerarán tres clases comunes de movimiento:

1. $a = f(t)$. *La aceleración es una función dada de* t. Al resolver (11.2) para dv y sustituir $f(t)$ por a, se escribe

$$dv = a\,dt$$
$$dv = f(t)\,dt$$

Al integrar ambos miembros, se obtiene la ecuación

$$\int dv = \int f(t)\,dt$$

que define v en términos de t. Sin embargo, debe notarse que una constante arbitraria se introducirá como resultado de la integración. Esto se debe al hecho de que hay muchos movimientos que corresponden a la aceleración dada $a = f(t)$. Para definir en forma única el movimiento de la partícula, es necesario especificar las *condiciones iniciales* del movimiento, esto es, el valor de v_0 de la velocidad y el valor x_0 de la coordenada de la posición en $t = 0$. Al sustituir las integrales indefinidas por *integrales definidas* con los límites inferiores correspondientes a las condiciones iniciales $t = 0$ y $v = v_0$ y los límites superiores correspondientes a $t = t$ y $v = v$, se escribe

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t f(t)\,dt$$

$$v - v_0 = \int_0^t f(t)\,dt$$

lo cual produce v en términos de t.

La ecuación (11.1) puede resolverse ahora para dx,

$$dx = v\,dt$$

y la expresión que se acaba de obtener sea sustituida por v. Ambos miembros se integran después, el miembro izquierdo con respecto a x desde $x = x_0$ hasta $x = x$, y el miembro derecho respecto a t desde $t = 0$ hasta $t = t$. La coordenada de la posición x se obtiene de ese modo en términos de t; el movimiento está completamente determinado.

Dos casos particulares importantes se estudiarán con gran detalle en las secciones 11.4 y 11.5: el caso en el que $a = 0$, que corresponde a un *movimiento uniforme,* y en el que $a =$ constante, que corresponde a un *movimiento uniformemente acelerado*.

2. $a = f(x)$. *La aceleración se da en función de* x. Al reordenar la ecuación (11.4) y sustituir $f(x)$ para a, se escribe

$$v\,dv = a\,dx$$
$$v\,dv = f(x)\,dx$$

Puesto que cada miembro contiene sólo una variable, se puede integrar la ecuación. Denotando de nuevo mediante v_0 y x_0, respectivamente, los valores iniciales de la velocidad y la coordenada de la posición, se obtiene

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$
$$\tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}v_0^2 = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

la cual produce v en términos de x. A continuación se resuelve (11.1) para dt,

$$dt = \frac{dx}{v}$$

y se sustituye por v la expresión que acaba de obtenerse. Ambos miembros pueden integrarse entonces para obtener la relación deseada entre x y t. Sin embargo, en muchos casos esta última integración no puede llevarse a cabo de manera analítica y debe recurrirse a un método de integración numérico.

3. $a = f(v)$. *La aceleración es una función dada de* v. Es posible sustituir $f(v)$ por a en (11.2) u (11.4) para obtener cualquiera de las relaciones siguientes:

$$f(v) = \frac{dv}{dt} \qquad f(v) = v\frac{dv}{dx}$$
$$dt = \frac{dv}{f(v)} \qquad dx = \frac{v\,dv}{f(v)}$$

La integración de la primera ecuación producirá una relación entre v y t; la integración de la segunda ecuación originará una relación entre v y x. Cualquiera de estas relaciones puede utilizarse junto con la ecuación (11.1) para obtener la relación entre x y t que caracteriza el movimiento de la partícula.