Digitale Werkzeugkompetenzen im Mathematikunterricht

Vortrag auf dem MNU Jahreskongress 2014 in Kassel

GABY HEINTZ – HANS-JÜRGEN ELSCHENBROICH – HEINZ LAAKMANN – HUBERT LANGLOTZ – FLORIAN SCHACHT – REINHARD SCHMIDT

Eine gemeinsame Arbeitsgruppe von MNU und T3 beschäftigt sich seit 2013 mit der Fragestellung, was unter ›Digitalen Werkzeugkompetenzen‹ zu verstehen ist. Es stellt sich die Frage, über welche Kompetenzen Schülerinnen und Schüler zum Abitur bzw. nach Abschluss der Sekundarstufe I beim Umgang mit digitalen Werkzeugen verfügen sollten. Die Arbeitsgruppe konkretisiert dieses entlang von Aufgabenbeispielen zur Sekundarstufe I und II (HEINTZ et al. 2014b). Damit verbunden stellt sich die Frage, wie Lernende ihren Einsatz von digitalen Werkzeugen im Arbeitsprozess und schriftlichen Überprüfungen dokumentieren sollten. Erste Ergebnisse der Arbeitsgruppe wurden auf der GDM-Jahrestagung 2014 in Koblenz (HEINTZ, ELSCHENBROICH, LAAKMANN, SCHACHT & SCHMIDT, 2014a) und auf dem MNU-Bundeskongress 2014 in Kassel vorgestellt.

1 Werkzeugbegriff und Werkzeugkompetenz

Werkzeuge spielen eine bedeutsame Rolle im Mathematikunterricht. Mit den Fortschritten in der Mathematik und mit den neuen Werkzeugen änderte sich im Laufe der Geschichte auch der Mathematikunterricht in seinen Zugängen zu Themen, didaktischen Möglichkeiten und letztlich auch in seinen Inhalten. Für die Arbeitsgruppe sind digitale Werkzeuge in erster Linie

 MNU 67/5 (15.7.2014) Seiten 300–306, ISSN 0025-5866,

didaktische Lernmittel, die zum Lernen und Lehren Vorteile bieten (siehe ELSCHENBROICH, 2011). Dabei sind Werkzeuge an sich weder gut noch schlecht. Es kommt auf den sinnvollen Gebrauch und immer auch auf den Kontext an, das gilt für das Geodreieck und für einen GTR wie für den Hammer oder die Kettensäge gleichermaßen. Die Aufgabe muss zum Werkzeug passen und das Werkzeug zur Aufgabe. Gerne werden Werkzeuge in der Diskussion glorifiziert (»Jetzt geht alles leichter.«) oder dämonisiert (»Der Taschenrechner ist schuld.«).

Im Mathematikunterricht spielen folgende digitale Werkzeuge eine besondere Rolle:

1. Dynamische Geometrie-Software: Geometrische Konstruktionen und Nutzen von Zugmodus und Ortslinien für Entdeckungen geometrischer Sätze als Invarianzen
2. Tabellenkalkulation: Rechnen mit Zahlen, Variablen und Formeln, Visualisierung großer Datenmengen in Diagrammen
3. Funktionenplotter: Visualisierung von Funktionen und funktionaler Zusammenhänge, numerische Berechnungen von Ableitungen und Integralen
4. Computeralgebra: Visualisierung algebraisch bzw. analytisch erzeugter funktionaler Zusammenhänge und Nutzung von Variablen als formale Zeichen (Algebra), Ableitungen und Integrale von Funktionen sowie Rechnungen mit Matrizen symbolisch
5. Multirepräsentationswerkzeuge: Vernetzung obiger Werkzeuge, Erhöhung der methodischen und didaktischen Möglichkeiten.

Multirepräsentationswerkzeuge sind z. B. GeoGebra und TI Nspire, mit denen die Beispiele in diesem Artikel auch realisiert wurden. So wie sie in gewisser Weise umfassende Software-Werkzeuge sind, so sind sie auch hardwareübergreifend. Das hat zur Folge, dass ein und dasselbe digitale Arbeitsblatt als Lern- und Arbeitsumgebung weitgehend identisch auf diesen Plattformen eingesetzt und parallel genutzt werden kann. Dies ist ein bedeutender Unterschied zu der Fülle von Apps zu allen möglichen Anwendungen, die mal auf der einen, mal auf der anderen Plattform laufen, aber kein durchgängiges didaktisches Konzept haben bzw. ermöglichen.

Im Internet finden sich viele unterrichtspraktische Umsetzungsvorschläge, z. B. bei GeoGebraTube. Wenig geklärt ist hingegen die Frage, über welche Werkzeugkompetenzen Schülerinnen und Schüler bei Nutzung digitaler Werkzeuge zum mittleren Schulabschluss bzw. im Abitur verfügen sollten und was überhaupt unter Werkzeugkompetenz zu verstehen ist und was es von Bedienkompetenz eines Programmes oder Gerätes unterscheidet. Vor diesem Hintergrund hat die MNU-T3-Arbeitsgruppe sich für die folgende Arbeitsdefinition von Werkzeugkompetenz mit besonderem Blick auf digitale Werkzeuge entschieden:

Werkzeugkompetenz bedeutet, mit Werkzeugen kompetent Mathematik zu betreiben.

Dies bringt zum Ausdruck, dass Werkzeuge zielgerichtet und vor dem Hintergrund eines jeweils spezifischen Zwecks zum Einsatz kommen: zur Bearbeitung mathematischer Probleme und zur Unterstützung des Lernens von Mathematik. Um es klar zu sagen: Unter Werkzeugkompetenz verstehen wir explizit mehr als die Bedienung von Geräten und Programmen! Für uns steht die Mathematik im Vordergrund und das ist der zentrale Fokus. Je nach mathematischem Gegenstandsbereich und je nach Problemsituation kann die jeweils benötigte Kompetenz dadurch sehr spezifisch sein.

Insofern liegen Werkzeugkompetenzen – so wie sie die Arbeitsgruppe versteht – quer zu den inhaltsbezogenen Leitideen der Bildungsstandards. In der Kompetenz K5 wird dazu ausgeführt:

Die Schülerinnen und Schüler können

- mathematische Hilfsmittel und digitale Mathematikwerkzeuge direkt nutzen (AB I)
- mathematische Hilfsmittel und digitale Mathematikwerkzeuge je nach Situation und Zweck gezielt auswählen und effizient einsetzen (AB II)
- die Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Verfahren, Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge reflektieren (AB III). (KMK 2012)

Ein Beispiel: Durch die Nutzung digitaler Werkzeuge lassen sich durch systematisches Variieren mathematische Zusammenhänge mit Hilfe von Variablen entwickeln und durch die Erzeugung bzw. Visualisierung von Graphen etwa Funktionen, Funktionenscharen oder algebraisch erzeugte Ableitungs- und Integralfunktionen darstellen. Auf diese Weise unterstützen digitale Werkzeuge sowohl inhalts- als auch prozessbezogene Kompetenzen. Heuristische Strategien werden im Sinne der dritten Grunderfahrung nach Winter ermöglicht.

Im folgenden Abschnitt werden exemplarisch Beispiele und mathematische Gegenstände vorgestellt, die jeweils spezifische Werkzeugkompetenzen erforderlich machen. Eine umfangreichere systematische Betrachtung der Werkzeugkompetenzen findet sich in HEINTZ et al. (2014b).

2 Unterrichtsbeispiele

2.1 Beispiel: Symmetrie (Klasse 5)

Um digitale Werkzeugkompetenz nachhaltig aufzubauen, ist es unserer Einschätzung nach sinnvoll, in den weiterführenden Schulen schon ab Klasse 5 mit digitalen Werkzeugen zu arbeiten. Ein geeignetes Beispiel ist die Erzeugung einer achsensymmetrischen Figur (Abb. 1), ein digitales Arbeitsblatt zur Einführung der Achsensymmetrie. Dort finden die Lernen-

Abb. 1. Mit dem Arbeitsblatt erstellte achsensymmetrische Figur.

den einen beweglichen Punkt und seinen an einer versteckten Symmetrieachse gespiegelten Bildpunkt. Beide Punkte sind im Spurmodus, so dass die Bewegungen der Punkte sichtbar bleiben. Dieses digitale Arbeitsblatt ist nicht nur gut geeignet, um konkrete Eigenschaften der Achsenspiegelung zu erkunden und zu entdecken, sondern auch für den gezielten Aufbau von digitaler Werkzeugkompetenz. Das bedeutet hier, dass die Lernenden feststellen, dass willkürliches Bewegen des Punktes wenig hilfreich ist, während eine zielgerichtetes und systematisches Bewegen des Punktes (z. B. so, dass sich die Spuren der Punkte mehrmals treffen und so, dass eine klare, gut erkennbare Form oder Figur entsteht) wesentliche Phänomene offenlegt. Die Schüler lernen, dass sie nicht bei den Phänomenen stehen bleiben dürfen, sondern dass die Phänomene den Ausgangspunkt bilden für die weitere mathematische Argumentation.

2.2 Beispiel: Optimierung (Klasse 8–10)

Um die spezifischen Vorteile zu erkennen und zielgerichtet zu nutzen, ist die Aufgabe »Rechteck-Optimierung« gut geeignet (Abb. 2).

Aufgabenstellung:
Eine Gerade schneidet die x-Achse und die y-Achse. Zwischen der Geraden und den beiden Achsen liegt ein Rechteck, dabei soll ein Rechteckpunkt auf der Geraden und zwei Rechteckseiten auf den Achsen liegen. Gesucht ist das flächengrößte Rechteck im ersten Quadranten unter der Geraden.

Die Aufgabe ist bekannt als Anwendungsaufgabe zu quadratischen Funktionen, kann aber auch zur Einführung in quadratische Funktionen genutzt werden. Hierfür liefert ein digitales Arbeitsblatt mit Geometrie-Fenster, Tabellenkalkulation und Funktionenplotter spezifische Beiträge, so dass die Schülerinnen und Schüler lernen, die einzelnen Werkzeuge gezielt einzusetzen.

Im Geometrie-Fenster kann die Grundseite des Rechtecks variiert werden. Während hastiges und zielloses Variieren eigentlich nur die Erkenntnis liefert, dass der Flächeninhalt nicht konstant ist, wird bei gezieltem, schrittweisem Ziehen deutlich, dass beim Vergrößern der Grundseite der Flächeninhalt erst schnell und dann immer langsamer wächst, sein Maximum annimmt, dann langsam kleiner wird und schließlich sehr stark abnimmt. In den Grenzfällen (Grundseite gleich Null oder Höhe gleich Null) ist auch der Flächeninhalt gleich Null. Das Muster in der Veränderung des Flächeninhalts kann in der Tabellenkalkulation genauer untersucht werden. Wählt man dort für die Grundseitenlänge eine feste Schrittweite, so wird deutlich, dass sich der Flächeninhalt linear verändert. Ohne dass es so benannt werden muss, begegnet den Lernenden hier bereits die Ableitung einer quadratischen Funktion, sodass ein Gespür für quadratische funktionale Zusammenhänge über die jeweiligen Änderungsverhalten erworben werden kann. Außerdem wird die Symmetrie der Werte für den Flächeninhalt deutlich. Dies kann als Anlass genommen werden, einen Funktionenplotter einzusetzen.

Die Tabellenkalkulation liefert bereits eine passende Wertetabelle, aber auch der vollständige Graph kann leicht geplottet werden, weil sich die Funktionsgleichung sofort aus dem Kontext ergibt ($f(x)$ = Grundseite mal Höhe = x mal $g(x)$, wobei $g(x)$ der Funktionsterm der linearen Funktion ist). Wesentliche Eigenschaften quadratischer Funktionen bzw. ihrer Graphen (Extremstelle, Nullstellen, Symmetrie etc.) werden deutlich. Digitale Werkzeuge regen hier die Reflexion über diese Eigenschaften an: Warum wird das Maximum genau in der Mitte des betrachteten Intervalls angenommen? Warum ist der maximale Flächeninhalt genau halb so groß wie der Flächeninhalt des von den Achsen und der Geraden eingeschlossenen Dreiecks? Worin liegt die Symmetrie des Graphen begründet? Kann man bei den beiden Grenzfällen noch sinnvoll von Rechtecken sprechen?

Außerdem ist der Schritt zur Verallgemeinerung der Situation mit digitalen Werkzeugen leicht zu realisieren, weil die betrachtete lineare Funktion mit digitalen Werkzeugen gut zu variieren ist. Dies ermöglicht nicht nur einen höheren Standpunkt, sondern wirft auch weitere mathematische Fragestellungen auf: Welche quadratischen Funktionen lassen sich durch derartige Optimierungsaufgaben »erzeugen«? Wie lautet zu einer vorgegeben quadratischen Funktion die zugehörige Optimierungsaufgabe?

Das Beispiel ›Optimierung‹ zeigt exemplarisch, welche Werkzeugkompetenzen für die Bearbeitung erforderlich sind bzw. von den Schülerinnen und Schülern erworben werden können. Es wird deutlich, dass

- gezielter und kompetenter Gebrauch von Geometriefenster, von Tabellenkalkulation und von Funktionenplotter ein mächtiges heuristisches Instrument darstellt,
- für verschiedene Fragestellungen und Betrachtungsweisen verschiedene Darstellungen (Geometrie, Tabelle, Graph, Term) ihren jeweils eigenen Beitrag leisten können,
- jede Darstellungsform ihre Grenzen hat und neue Fragen aufwirft,
- Funktionen erst im Zusammenspiel der unterschiedlichen Darstellungsformen ihren Reichtum offenbaren.

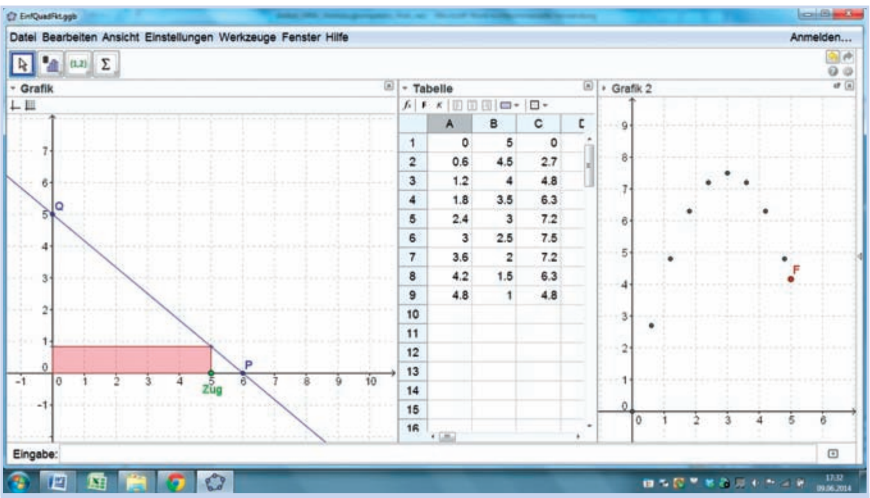

Abb. 2. Optimierungsaufgabe, bearbeitet in einem Multirepräsentationsprogramm

2.3 Beispiel: Lineare Approximation

Welchen Beitrag digitale Werkzeuge für die Begriffsbildung leisten können, kann am Beispiel eines handlungsorientierten, graphischen Zugangs zur Ableitungsfunktion verdeutlicht werden (RIEMER & SCHMIDT, 2013). Ein bekannter Weg, der sich ideal mit dynamischer Software umsetzen lässt, ist das ›Funktionenmikroskop‹, wo man sich lokal solange in den Graphen hineinzoomt, bis der Bildausschnitt linear aussieht. Dies ist ein gutes Verfahren, um lokal zu einem Wert der Steigung des Funktionsgraphen, zu der Ableitung, zu kommen. In dem hier beschriebenen Verfahren werden aber in regelmäßigen Abständen an einem Funktionsgraphen Strecken angebracht, die sich drehen lassen (Abb. 3). Die Aufgabe besteht dann darin, sie nach Augenmaß so zu drehen, dass sie den Graphen an dieser Stelle möglichst gut approximieren, also tangential werden. Durch das Drehen der Strecken wird ein Punkt, der sich in der Ausgangssituation an der gleichen Stelle auf der x-Achse befindet, so bewegt, dass seine y-Koordinate der Steigung der jeweiligen Strecke entspricht (Abb. 4). Dadurch erhält man nicht nur eine Vertiefung der anschaulichen Vorstellung vom Ableiten und von der linearen Approximation von Funktionsgraphen durch Tangenten, sondern die einzelnen lokalen Informationen ergeben in der Gesamtschau auch einen globalen Eindruck, weil die dahinterliegende Ableitungsfunktion sichtbar wird. So wird eine Hypothesenbildung gefördert, z. B. dass die Ableitungsfunktion einer Funktion dritten Grades eine quadratische Funktion sein könnte. Auch wenn dieser Weg auf den ersten Blick eine geringere Genauigkeit hat als das Funktionenmikroskop, erhält man durch die globale Sicht einen Erkenntniszuwachs. Auch kann man gegebenenfalls das Hineinzoomen hier nutzen, um die tangentiale Approximation durch die Strecken zu verbessern.

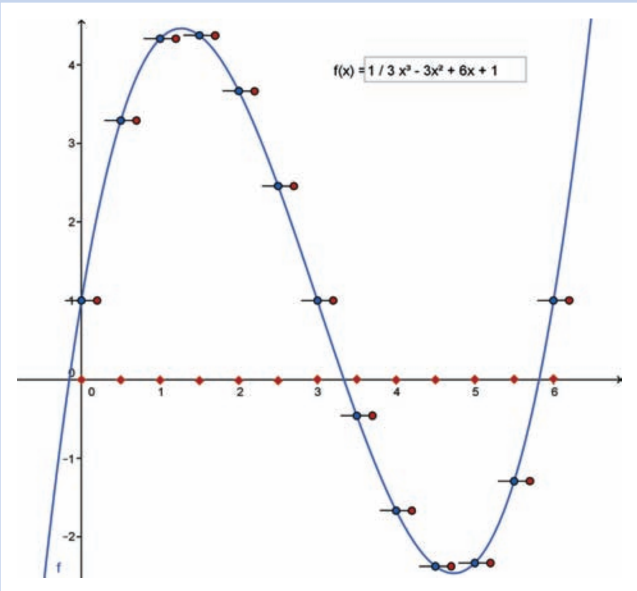

Abb. 3. Graph mit angehefteten drehbaren Strecken

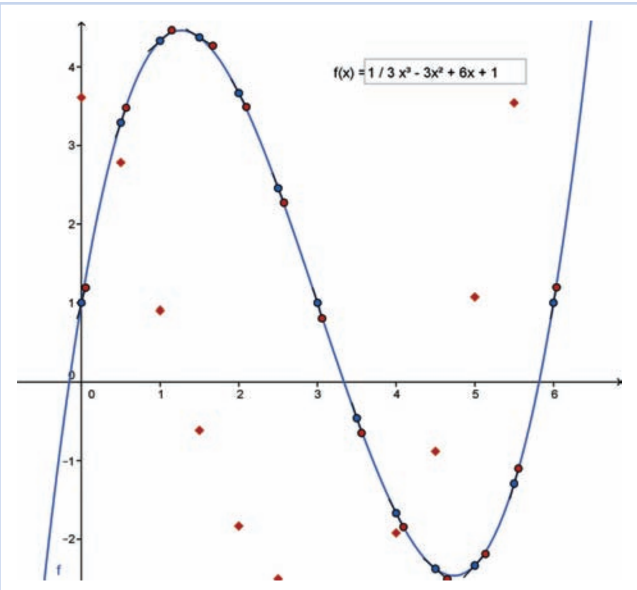

Abb. 4. Graph mit tangentialen Strecken

2.4 Beispiel: Hinführung zum Hypothesentest

Die Funktionsweise und die Bedeutung eines Hypothesentests selbst zu erfahren, stellt einen wesentlichen Erkenntnisgewinn im Stochastik-Unterricht dar. Am Beispiel eines Selbstversuchs wird ein möglicher Lernzuwachs zwischen zwei Versuchen erforscht.

Nach einer Idee von RIEMER (2012) werden die Lernenden aufgefordert, mit geschlossenenen Augen eine Zeitspanne von 60 Sekunden abzuschätzen. Danach öffnen sie die Augen und notieren, wie viele Sekunden tatsächlich auf einer mitlaufenden Stoppuhr vergangen sind. Die Ergebnisse (Abb. 5) werden in einer Spalte (versuch1) niedergeschrieben. Danach wird der Versuch wiederholt, und die Ergebnisse werden in die nächste Spalte (versuch2) geschrieben.

A schüler	B versuch1	C versuch2
1	66	52
2	64	59
3.	70	58
4.	67	68
5.	79	62
6.	78	65
7.	85	54
8.	71	65
9.	61	56
10.	78	53
11.	57	54
12.	66	57
13.	69	59
14.	62	63
15.	56	58
16.	64	56
17.	77	61
18.	67	67

Abb. 5. Ergebnisse der Schätzversuche

Aufgabe:
Können Sie belegen, dass sich die Lernenden verbessert haben?
Wenn ja: Belegen Sie, dass die Verbesserung nicht rein zufällig entstanden sind.

Mithilfe der beschreibenden Statistik können die zwei Testergebnisse analysiert werden, indem z. B. durch Veränderung der Boxplots (Abb. 6) von Versuch 1 und Versuch 2 Verbesserungen erkannt werden. Aber sind diese Ergebnisse denn signifikant oder nur rein zufällig?

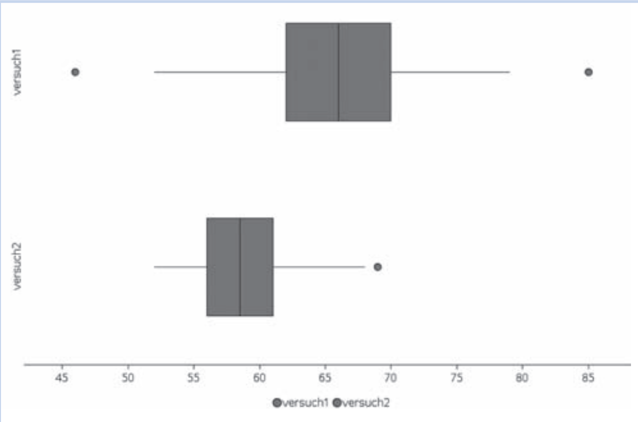

Abb. 6. Boxplotdarstellung des ersten und zweiten Versuchs

Simulationen helfen hier weiter. Ein Vergleich mit – vom Rechner – zufällig erzeugten »Verbesserungen« liefert Einsicht in die »Zufälligkeit« des Ergebnisses und führt zu grundlegenden Überlegungen zum Verständnis eines Hypothesentests (Abb. 7). Der Vorteil der Simulationen besteht hier darin, dass diese elementar ohne einen theoretischen Überbau durchgeführt werden können und so einen Beitrag zum Aufbau eines Grundverständnisses von Hypothesentests liefern können.

Wesentliche Erkenntnisse hinsichtlich der zugrunde liegenden Werkzeugkompetenzen bei der Lösung der Aufgabe sind:

- In der Analyse der Boxplots können aus Veränderungen der Lage der Box, der Veränderung der Mediane Aussagen über die Verbesserung getroffen werden.
- Durch Vergleich mit vielen Simulationen zufälliger Verbesserungen wird deutlich, dass sich nur selten in diesen Simulationen eine größere Anzahl von Verbesserungen im Vergleich zum Test ergibt.
- Führt man die Simulationen häufig durch, kann mittels der relativen Häufigkeit angegeben werden, wie selten das Versuchsergebnis in einer Simulation auftritt.

Je nach Fähigkeiten im Umgang mit dem Rechner können die Lernenden mit unterschiedlich stark vorbereiteten Dateien arbeiten. Sind Binomialverteilungen schon behandelt worden, bietet sich im Anschluss ein Vergleich mit der Verteilung $p = 0{,}5$ an.

2.5 Zur Rolle der Werkzeugkompetenzen

Die folgenden digitalen Werkzeugkompetenzen spielen in den hier vorgestellten Beispielen eine wesentliche Rolle: Die Lernenden

- verwenden dynamische Geometriesoftware als heuristisches Instrument in vorbereiteten digitalen Arbeitsblättern, indem sie durch zielgerichtetes Ziehen die mathematischen Objekte schrittweise und langsam verändern und dadurch Muster und wesentliche Eigenschaften (z. B. die wesentlichen Sätze der Schulgeometrie wie Satz des THALES, Satz des PYTHAGORAS) entdecken,
- wechseln die Darstellungsform (Tabelle, Graph, Term), indem sie die im DGS erkundete Variation der mathematischen Objekte in die Tabellenkalkulation übertragen und schließlich einen passenden Funktionsterm – etwa für einen zugrunde liegenden quadratischen Zusammenhang – ermitteln,
- stellen Funktionsgraphen mit digitalen Werkzeugen dar (z. B. mit einem Funktionenplotter oder als Ortslinie eines dynamischen Punktes mit geeigneten Koordinaten) und wählen ein passendes Koordinatensystem, indem sie die funktionale Abhängigkeit in einem zweiten Grafikfenster sichtbar machen,
- nutzen digitale Werkzeuge als Kontrollinstanz, indem sie den zum Funktionsterm passenden Funktionsgraphen mit den zuvor ermittelten Wertepaaren abgleichen,
- reflektieren über die Grenzen der unterschiedlichen Darstellungsformen, indem sie den spezifischen Betrag der einzelnen Darstellungsformen zur Problemlösung benennen und offene Fragen als Ausgangspunkt der Weiterarbeit sammeln.

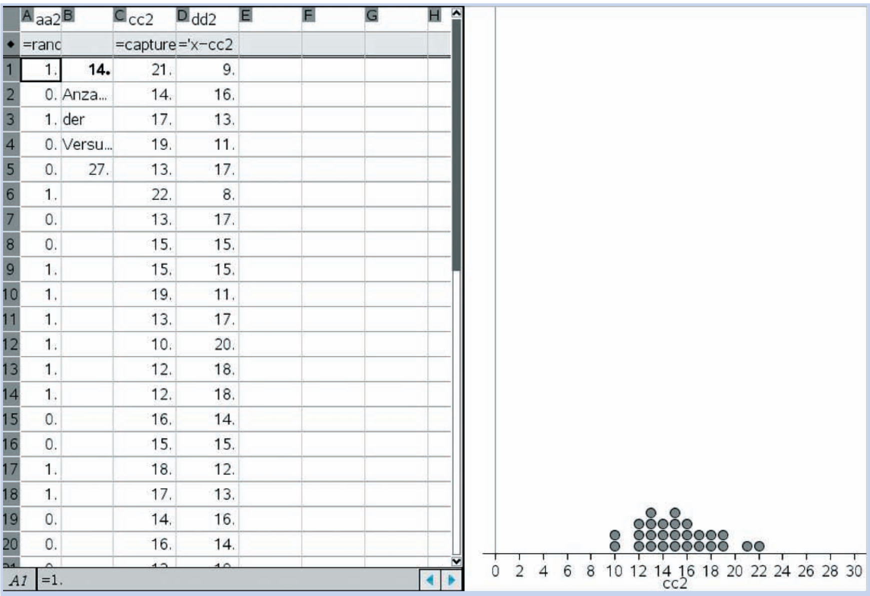

Abb. 7. Ergebnis von 25 Simulation eines dreißigfachen Münzwurfes

Dadurch leisten die hier diskutierten Problemstellungen einen Beitrag zur Erreichung der Kompetenzerwartungen der digitalen Werkzeugkompetenz, wie sie in der Veröffentlichung der Arbeitsgruppe (HEINTZ et al. 2014b) formuliert werden. Dort findet sich auch eine umfangreichere Liste, die die Erwartungen für das Ende der Jahrgangsstufe 6, 8, 10 und 12 umfasst.

3 Dokumentation von Bearbeitungsprozessen

Im Mittelpunkt des hier formulierten Verständnisses zu digitalen Werkzeugkompetenzen steht die Mathematik, die je nach genutztem Werkzeug, aber auch je nach Kontext oder je nach den Bedingungen in der Lerngruppe in einer ganz spezifischen Weise erfahren wird. Ob etwa die Satzgruppe des PYTHAGORAS in einem Anwendungskontext erkundet wird oder im Rahmen eines innermathematischen Kontextes, ob mit Geodreieck und Zirkel oder mit einer DGS, ob in einer offenen Erkundung oder lehrgangsartig – die Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler sind eng an die individuellen Erfahrungen gebunden, die sie im Rahmen des Lernprozesses machen. Natürlich ist es dabei das Ziel einer jeden Lerneinheit, dass die Schüler an deren Ende die konsolidierten mathematischen Begriffe und Zusammenhänge kennen. Die Wege, d. h. die individuellen Lernprozesse, können dabei durchaus sehr verschieden sein. Digitale Werkzeuge ermöglichen in diesem Zusammenhang häufig mathematische Erfahrungsräume, die sich in besonderer Weise eignen, um Mathematik kompetent zu betreiben.

Dabei stellt sich allerdings die Herausforderung, eben diese Erfahrungen auch in adäquater Weise zu dokumentieren. Zu einem kompetenten Umgang mit mathematischen Begriffen gehört auch die Fähigkeit, mathematische Sachverhalte zu dokumentieren und damit zu kommunizieren. Eine wesentliche Herausforderung im Unterricht ist daher die Frage, wie Schüler die Aufgabenbearbeitung dokumentieren und damit Einsatz und Nutzen von Werkzeugen auch Gegenstand der expliziten Reflexion durch die Schüler sind. Die Frage nach der Dokumentation von Arbeitsprozess und Arbeitsprodukt ist dabei umso wichtiger, als neben der üblicherweise genutzten Fachsprache, der mathematischen Symbolsprache sowie der Umgangssprache beim Gebrauch digitaler Werkzeuge auch noch die spezifische Werkzeugsprache im Unterricht eine Rolle spielt.

Zwei typische Beispiele (Jahrgangsstufe 11, Gymnasium Düsseldorf, NRW) zeigen eine mögliche Spannbreite, wie Schülerinnen und Schüler Aufgabenlösungen (zu unterschiedlichen Aufgaben) dokumentieren. Hinsichtlich der Dokumentation mathematischer Kompetenzen machen die Beispiele die Schwierigkeit angemessener Dokumentationen u. a. wegen der zu starken Betonung der CAS-Syntax deutlich. Werkzeugkompetenz und Kommunikation bzw. Dokumentation sind in diesem Sinne auf das Engste miteinander verknüpft. Die Anforderungen an Dokumentationskompetenzen unterscheiden sich dabei einerseits hinsichtlich ihrer Funktion (etwa in Lern- oder Leistungssituationen) oder andererseits hinsichtlich der jeweiligen Zielgruppe.

Das Beispiel in Abbildung 8 etwa ist in dieser Form nicht verständlich für jene, die nicht das gleiche Computer-Algebra-System (CAS) nutzen wie der Schüler Timo. Für eine Dokumentation im Rahmen einer zentral gestellten Klausur würde sich demnach eine solche Dokumentationsvariante nicht eignen: Einerseits wäre sie für Zweitkorrektoren, die ein anderes CAS nutzen, nicht verständlich, und andererseits sollte eine Dokumentation im Rahmen einer Prüfungssituation die Nutzung des CAS eher auf einer inhaltlichen mathematischen Ebene und weniger auf einer syntaktischen gerätespezifischen Ebene verdeutlichen. Gleichwohl eignet sich eine Dokumentation wie diese, um etwa zu Beginn eines Lernprozesses festzuhalten, wie Timo mit Hilfe des CAS eine lineare Regressionsfunktion mit TI-Nspire ermittelt hat. Diese Dokumentation kann später genutzt werden, um das genaue Vorgehen und die Bedienung des CAS zu reflektieren oder mit den Mitschülern auszutauschen.

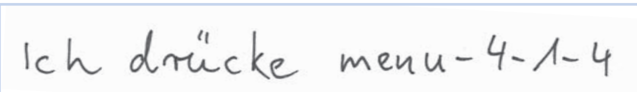

Abb. 8. Timos Lösung

Svenjas Dokumentation in Abbildung 9 dagegen nutzt mit dem solve-Befehl werkzeugsprachliche Elemente, verdeutlicht hier aber gleichzeitig die mathematische Idee, dass sie die Nullstellen einer gegebenen Funktion sucht. Der solve-Befehl ist in diesem Zusammenhang ein Beispiel für Werkzeugsprache, die nicht nur syntaktische Bedienung transportiert, sondern auch – in der Regel – eine mathematische Struktur – in Svenjas Beispiel etwa das Bestimmen von Nullstellen. Es wird deutlich, dass Dokumentationen nicht per se gut oder schlecht sind, sondern spezifisch je nach Zielgruppe oder Funktion (SCHACHT, 2014a).

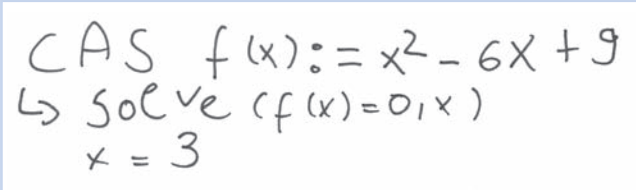

Abb. 9. Svenjas Lösung

Erarbeitet wurden Kriterien für die Nutzung von Fach- und Werkzeugsprache (SCHACHT, 2014b), die diese Unterscheidung aufgreifen. Lernverlaufsorientierte Gütekriterien berücksichtigen die Tatsache, dass sich bei Lernenden im Mathematikunterricht nicht nur begriffliche Prozesse vollziehen, sondern dass auch der Umgang mit und die Nutzung von Fach- und Werkzeugsprache erlernt werden müssen. Demgegenüber tragen Lernstand orientierte Gütekriterien der Tatsache Rechnung, dass die Dokumentation von Bearbeitungen etwa in zentralen Prüfungen einen höheren Grad an fach- und werkzeugsprachlicher Konsolidiertheit haben sollte als etwa zu Beginn einer Lerneinheit.

Die beiden folgenden Schülerdokumentationen stammen einem Thüringer Gymnasium. Inhaltlich geht es um Winkelbestimmung in der Vektorrechnung und sie verdeutlichen diesen Unterschied in den Dokumentationsvarianten. Während die Lösungsdokumentation für die Winkelbestimmung in Abbildung 10 sich in besonderer Weise eignet, um das Vorgehen bei der Winkelbestimmung exemplarisch festzuhalten, zeigt Abbildung 11 eine Variante ohne die Nutzung von Werkzeugsprache.

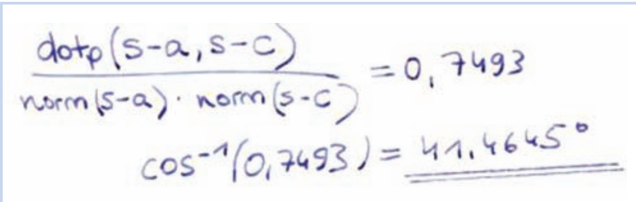

Abb. 10. Nutzung von Werkzeugsprache

Hier wird deutlich, dass der Einsatz digitaler Werkzeuge im Mathematikunterricht wesentliche Konsequenzen auf die Dokumentation von Prozessen und Ergebnissen hat. Im Unterricht ist eine Sensibilisierung für die unterschiedlichen sprachlichen Ebenen und die verschiedenen Varianten der Dokumentation ein wichtiges Ziel. Dabei ist die Zielperspektive mit Blick auf das Abitur und eine mathematische Allgemeinbildung sicherlich, die Dokumentationen möglichst werkzeugunabhängig zu verfassen. Diese Zielperspektive macht allerdings in besonderer Weise deutlich, dass gerade zu Beginn der Nutzung von

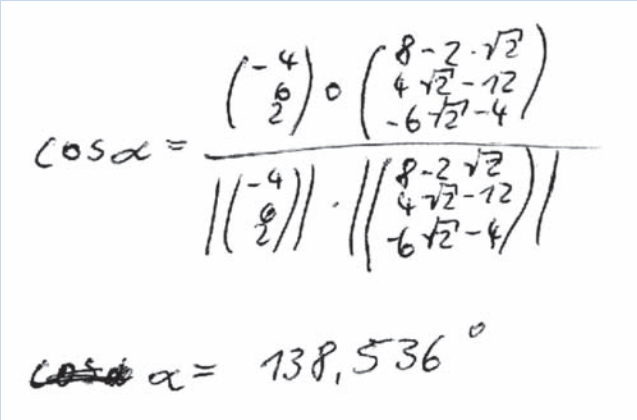

Abb. 11. Dokumentation ohne Werkzeugsprache

digitalen Werkzeugen (oder besonderer Funktionalitäten) sowohl Fachsprache als auch Werkzeugsprache zentrale Elemente von Schülerdokumentationen sein sollten, die im Unterricht thematisiert werden sollten.

4 Konsequenzen für den Mathematikunterricht

An den ausgeführten Beispielen wird deutlich, wie eng digitale Werkzeugkompetenzen mit den übrigen prozessbezogenen Kompetenzen wie Problemlösen und Argumentieren und Kommunizieren verwoben sind, und wie spezifisch sie sich je nach Inhaltsbereich konkretisieren lassen. Erfolgreicher Einsatz digitaler Werkzeuge kann nur dann gelingen, wenn diesem Umstand Rechnung getragen wird und den Unterrichtenden klar ist, dass digitale Werkzeugkompetenz mehr ist als bloße Bedienkompetenz. Dies hat dann auch Konsequenzen im Bereich der Dokumentation.

Die Optimierungsaufgabe zeigt außerdem, dass der Einsatz eines digitalen Lernwerkzeuges einen großen Beitrag zur Begriffsbildung leisten kann, wenn die Lernenden kompetent mit DGS, Funktionenplotter und Tabellenkalkulation umgehen können und der Unterricht nicht einseitig auf eine Darstellungsform fokussiert. So verstanden ergeben sich aus dem sinnvollen Einsatz digitaler Werkzeuge eine Erweiterung der didaktischen und methodischen Möglichkeiten für Lehrende und eine Zunahme möglicher Schüleraktivitäten.

Ein echter mathematischer Mehrwert wird insbesondere durch den Einsatz von dynamischen Multirepräsentationswerkzeugen erlebbar, weil hier in unterschiedlichen Repräsentationsmodi gearbeitet werden kann.

Die MNU-T3-Handreichung (HEINTZ et al. 2014b) zeigt anhand weiterer Beispiele zu Standardthemen des Mathematikunterrichts, welche Werkzeugkompetenzen die Lernenden über die einzelnen Jahrgangsstufen bis zum Abitur erwerben können. Alle Beispiele werden dann zum Download angeboten.

Literatur

ELSCHENBROICH, H.-J. (2011). Digitale Medien und Werkzeuge im Mathematikunterricht. In: H.-J. ELSCHENBROICH & G. GREEFRATH (Hg.): *Mathematikunterricht mit digitalen Medien und Werkzeugen.* Münster: MV-Wissenschaft, 8–10.

HEINTZ, G., ELSCHENBROICH, H.-J., LAAKMANN, H., SCHACHT, F. & SCHMIDT, R. (2014a). Digitale Werkzeugkompetenzen im Mathematikunterricht. In: J. ROTH & J. AMES. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014.* Münster: WTM Verlag.

HEINTZ, G., ELSCHENBROICH, H.-J., LAAKMANN, H., LANGLOTZ, H., POETHKE, M., RÜSING, M., SCHACHT, F., SCHMIDT, R., SCHMIDT, U. & TIETZ, C. (2014b). *Digitale Werkzeugkompetenzen von Klasse 5 bis zum Abitur.* Erscheint 2014 bei MNU. Neuss: Verlag Seeberger.

RIEMER, W. & SCHMIDT, R. (2013). Graphisch ableiten. Eine »Sternstunde« zu Beginn der Analysis. *PM Praxis der Mathematik, 55*(2), 41–42.

RIEMER, W. (2012). Lernen aus Erfahrung. Ein »Fünfminuten-Experiment« zum Hypothesentest. *PM Praxis der Mathematik, 54*(6), 25.

SCHACHT, F. (2014a): Dokumentation ≠ Dokumentation. Funktions- und Zielgruppenabhängige Varianten bei Schülerdokumentationen. *PM Praxis der Mathematik.* Wird 2014 erscheinen.

SCHACHT, F. (2014b): So schreibe ich das auf! Dokumentationsvarianten am Beispiel von Funktionen. Erscheint in: G. HEINTZ & G. PINKERNELL (Hg.): *Festschrift ›Digitale Werkzeuge für den Mathematikunterricht‹ für Hans-Jürgen Elschenbroich.* Neuss: Verlag Seeberger.

GABY HEINTZ, gaby.heintz@mnu.de, Leiterin der Arbeitsgruppe WeKo, Fachleiterin Mathematik am ZfsL Neuss.

HANS-JÜRGEN ELSCHENBROICH, hans-juergen.elschenbroich@mnu.de, Korschenbroich.

Dr. HEINZ LAAKMANN, hlaakmann@me.com, Lehrer im Hochschuldienst der TU Dortmund.

Dr. HUBERT LANGLOTZ, hubert.langlotz@mnu.de, T3-Länderkoordinator für Thüringen, Stellveretretender Schulleiter am Elisabeth-Gymnasium Eisenach.

Dr. FLORIAN SCHACHT, florian.schacht@math.tu-dortmund.de, Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts TU Dortmund.

REINHARD SCHMIDT, schmidti@hirnwindungen.de,Direktor des GeoGebra-Instituts Köln/Bonn, Fachleiter für Mathematik am ZfsL Engelskirchen.