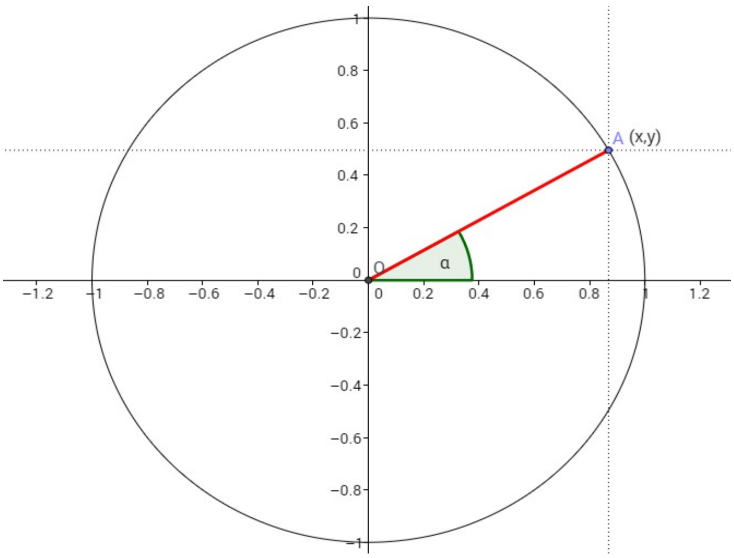
Teoría – Tema 2

Teoría - 7 - relación fundamental de trigonometría y OJO a los RADIANES

Signo de las razones fundamentales en cada cuadrante

Sea la circunferencia goniométrica de radio unidad.



Sobre esta circunferencia, si consideramos un triángulo rectángulo de base x , altura y e hipotenusa 1 , ya sabemos que:

$$sen(\alpha)=y \qquad \cos(\alpha)=x \qquad tg(\alpha)=\frac{y}{x}$$

Con estos valores es inmediato comprender el signo de las razones trigonométricas en los cuatro cuadrantes del sistema de coordenadas.

- Primer cuadrante → seno + coseno + tangente +
- Segundo cuadrante → seno + coseno - tangente -
- Tercer cuadrante → seno - coseno - tangente +
- Cuarto cuadrante → seno - coseno + tangente -

Además, es obvio que el valor del seno y del coseno está acotado al intervalo cerrado $[-1,1]$, mientras que el valor de la tangente puede oscilar en $(-\infty, +\infty)$.

Vueltas positivas o negativas a un ángulo

Dado un ángulo α podemos afirmar que el ángulo $\alpha+360^o$ posee los mismos valores del seno, del coseno y de la tangente. Es decir:

$$sen(\alpha)=sen(\alpha+360^o)$$
$$\cos(\alpha)=\cos(\alpha+360^o)$$
$$tg(\alpha)=tg(\alpha+360^o)$$

Lo mismo podríamos decir del ángulo $\alpha-360^o$:

$$sen(\alpha)=sen(\alpha-360^o)$$
$$\cos(\alpha)=\cos(\alpha-360^o)$$
$$tg(\alpha)=tg(\alpha-360^o)$$

Y repetir el mismo razonamiento para cualquier ángulo múltiplo de 360º. Es decir: $\pm 720^o , \mp 1080^o ...$.

En consecuencia, al obtener un ángulo en problemas de trigonometría donde se deben cumplir condiciones para el seno, el coseno o la tangente, se suele añadir $+360^o \cdot k \ , \ k \in \mathbb{Z}$ para indicar que la solución obtenida es igualmente válida si damos vueltas completas positivas o negativas alrededor de la circunferencia goniométrica:

$$\alpha+360^o \cdot k \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

Recuerda que los número enteros $\mathbb{Z}$ son $\{...-2,-1,0,1,2,...\}$.

Razones fundamentales y relaciones

Asimismo, para cada valor del seno, el coseno y la tangente podemos definir sus valores inversos (no confundir con las funciones inversas, que veremos más adelante). Estos valores inversos se definen como cosecante, secante y cotangente:

$$cosec(\alpha)=\frac{1}{sen(\alpha)}=\frac{1}{y} \qquad sec(\alpha)=\frac{1}{\cos(\alpha)}=\frac{1}{x} \qquad cotg(\alpha)=\frac{1}{tg(\alpha)}=\frac{x}{y}$$

Por Pitágoras, en la circunferencia goniométrica de radio unidad, se cumple:

$$1^2=x^2+y^2$$

Sustituyendo sus valores asociados a razones trigonométricas:

$1=\cos^2(\alpha)+sen^2(\alpha)$ → **Relación fundamental de trigonometría**

Si dividimos todo por $sen^2(\alpha)$:

$$\frac{1}{sen^2(\alpha)}=\frac{\cos^2(\alpha)}{sen^2(\alpha)}+\frac{sen^2(\alpha)}{sen^2(\alpha)} \rightarrow cosec^2(\alpha)=cotg^2(\alpha)+1$$

Si en la relación fundamental dividimos todo por $\cos^2(\alpha)$:

$$\frac{1}{\cos^2(\alpha)}=\frac{\cos^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}+\frac{sen^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} \rightarrow sec^2(\alpha)=1+tg^2(\alpha)$$

¿Cómo obtener ángulos con la calculadora? Ojo a los modos DEG y RAD de la calculadora. Funciones arcoseno, arcocoseno y arcotangente

Imaginemos que en un problema de trigonometría llegamos a la expresión:

$$sen(\alpha)=\frac{1}{2}$$

Y nos dicen que el ángulo α es del primer cuadrante. ¿Cómo conocer el ángulo solución?

Usando la calculadora. Cada modelo posee botones diferentes, pero la gran mayoría de marcas incluyen un botón de cambio ("Shift") o inverso ("Inv" o bien símbolo de potencia elevado a "-1") que podemos pulsar seguido del botón del seno, coseno o tangente.

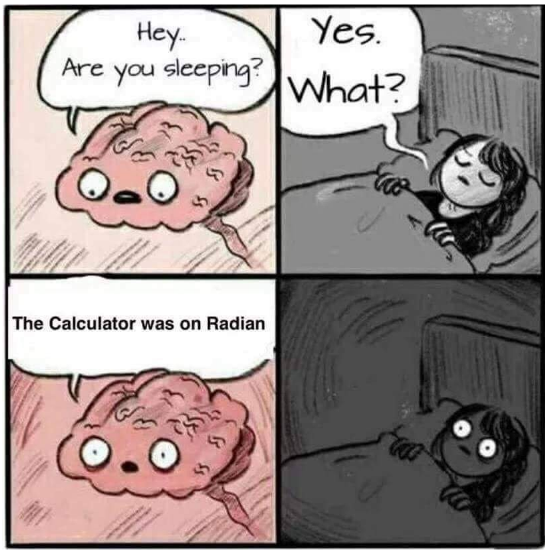
Esta secuencia nos ofrece la función inversa del seno (arcoseno), la función inversa del coseno (arcocoseno) y la función inversa de la tangente (arcotangente).

Siguiendo con nuestro ejemplo, la calculadora nos permite obtener:

$arcoseno(\frac{1}{2})=30º$ → No olvides añadir las vueltas → $arcoseno(\frac{1}{2})=30º\pm 360º\cdot k\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

Si la calculadora está en **modo DEG nos dará el ángulo en grados**. Entendiendo un grado como una de las 360 partes distintas en que se puede dividir la circunferencia goniométrica.

Si está en **modo RAD nos dará el ángulo en radianes**. Siendo el radián el ángulo de giro resultante de recorrer por el perímetro de la circunferencia goniométrica una distancia igual a su radio.



Ojo: No usar el modo G de la calculadora, reservado para ciertas aplicaciones técnicas de topografía que no dividen la circunferencia en 360 partes iguales sino en 400.

¿Cómo entender matemáticamente lo que hace la calculadora para obtener un ángulo a partir del valor del seno, del coseno o de la tangente?

Si sobre la expresión de partida $sen(\alpha)=\frac{1}{2}$ aplicamos la función inversa del seno a ambos lados de la igualdad, tendremos:

$$arcsen(sen(\alpha))=arcsen(\frac{1}{2})$$

Arcoseno y seno son funciones inversas. Y ya sabemos del Tema 1 que las funciones inversas cancelan entre sí (como la raíz cuadrada y la potencia de orden dos, o el logaritmo y la exponencial). Así quedaría:

$$\alpha=arcoseno(\frac{1}{2})=30º+360º\cdot k\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

La pareja coseno y arcocoseno también cancela. Al igual que lo hacen la pareja tangente y arcotangente.

¿Qué hubiera pasado si nos dicen que $sen(\alpha)=\frac{1}{2}$ **y que el ángulo es del segundo cuadrante?**

La calculadora nos ha dado un ángulo del primer cuadrante. ¿Cómo pasamos al ángulo del segundo cuadrante con el mismo seno? Responderemos en futuros PDF del tema. Paciencia.

Resumiendo: Las funciones arcoseno, arcocoseno y arcotangente son las funciones inversas del seno, del coseno y de la tangente respectivamente. Y aquí viene un detalle que suele costar entender:

- La inversa del valor del seno es la cosecante, pero la inversa de la función seno es el arcoseno.

- La inversa del valor del coseno es la secante, pero la inversa de la función coseno es el arcocoseno.

- La inversa del valor de la tangente es la cotangente, pero la inversa de la función tangente es la arcotangente.

Es decir:

Si $sen(\alpha)=\frac{1}{2}$ y buscamos el valor del ángulo α aplicamos arcoseno, obteniendo:

$$\alpha=arcoseno(\frac{1}{2})=30º+360º\cdot k\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

Pero si buscamos dar la vuelta al valor del seno, aplicamos cosecante: $cosec(\alpha)=\frac{1}{sen(\alpha)}=2$