Teoría – Tema 5

Teoría - 1a - integral indefinida y constante de integración

Integral indefinida

Sea la función $f(x)$. A toda función $F(x)$ cuya derivada sea $f(x)$ se le llama función primitiva de $f(x)$.

Definición de función primitiva

$F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ si se verifica: $F'(x)=f(x)$ (notación de Newton)

Usando notación de diferenciales: $\frac{d[F(x)]}{dx}=f(x)$ (notación de Leibnitz)

Como la derivada de una constante es 0 , si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ también serán primitivas las siguientes funciones:

$$F_1(x)=F(x)+constante_1 \rightarrow F_1'(x)=F'(x) \rightarrow F_1'(x)=f(x)$$
$$F_2(x)=F(x)+constante_2 \rightarrow F_2'(x)=F'(x) \rightarrow F_2'(x)=f(x)$$
$$F_3(x)=F(x)+constante_3 \rightarrow F_3'(x)=F'(x) \rightarrow F_3'(x)=f(x)$$
$$F_4(x)=F(x)+constante_4 \rightarrow F_4'(x)=F'(x) \rightarrow F_4'(x)=f(x)$$

Integral indefinida

Se llama integral indefinida de una función $f(x)$, y se representa $\int f(x)dx$, al conjunto de todas sus primitivas.

$\int f(x)dx=F(x)+constante$ → es decir → $F'(x)=f(x)$

Ejemplo 1 resuelto

$$\int \frac{\ln x}{x}dx=\frac{\ln^2 x}{2}+C$$

$$\int \sqrt[3]{x^2}dx=\frac{3\cdot\sqrt[3]{x^5}}{5}+C$$

Propiedades de la integral indefinida

1. La derivada de una suma de funciones es la suma de las derivadas de cada función. Por tanto, la integral de una suma de funciones es la suma de las integrales de cada función.

$$\int [f(x)+g(x)+h(x)]\,dx=F(x)+G(x)+H(x)+C$$

Es costumbre dedicar la letra C para expresar la constante de integración.

2. La derivada de una constante por una función es la constante por la derivada de la función. Por tanto, la integral de una constante por una función es la constante por la integral de la función.

$$\int k\cdot f(x)\,dx=k\cdot\int f(x)\,dx=F(x)+C$$

3. Si multiplicamos y dividimos una integral por una constante, la función primitiva no varía.

$$\int f(x)\,dx=\int \frac{k}{k}\cdot f(x)\,dx=F(x)+C$$

4. Si dentro de la integral, sumamos y restamos una misma cantidad real, la función primitiva no varía. Esta cantidad real puede ser una constante o bien depender de la variable de integración.

$$\int f(x)\,dx=\int (f(x)+k-k)\,dx=F(x)+C$$

$$\int f(x)\,dx=\int (f(x)+x-x)\,dx=F(x)+C$$

Integrales inmediatas

Se llama integral inmediata a aquella que se obtiene directamente aplicando las reglas de derivación en sentido inverso, o bien tras aplicar convenientemente las propiedades anteriormente descritas.

Ejemplo 2 resuelto

$$\int [\frac{7}{x}+\frac{2}{5(1+x^2)}]\,dx=\int \frac{7}{x}\,dx+\int \frac{2}{5(1+x^2)}\,dx=7\cdot\int \frac{1}{x}\,dx+\frac{2}{5}\int \frac{1}{(1+x^2)}\,dx=7\cdot\ln x+\frac{2}{5}\,arcotg\,x+C$$