Sistemas de Ecuaciones

CURSO	TEMA	WWW.DANIPARTAL.NET
1ºBach	1. Repaso ESO	Colegio Marista "La Inmaculada" de Granada

INFORMACIÓN GENERAL

En el Tema 4 de 1ºBachillerato estudiaremos, en profundidad, los sistemas lineales. Ahora vamos a repasar conceptos ya adquiridos en Secundaria y ampliaremos con la conocida como notación matricial de un sistema. De los siguientes ejemplos, vamos a fijarnos únicamente en la parte algebraica (ecuaciones). En el Tema 4 relacionaremos estas ideas con la parte geométrica (rectas y planos).

También hablaremos, al final de este documento, de los sistemas no lineales y cómo resolverlos.

TIPOS DE SOLUCIÓN DE UN SISTEMA LINEAL

Si el sistema lineal posee solución, hablamos de **sistema compatible**. Si no posee solución, es un **sistema incompatible**.

Si existe solución y es única, tendremos **sistema compatible determinado (S.C.D.)**. Si existen infinitas soluciones posibles, según el valor de un parámetro, hablaremos de **sistema compatible indeterminado (S.C.I.)**.

¿Cómo detectar si estamos ante un **sistema incompatible (S.I.)**? Si al resolver aparece un absurdo matemático (por ejemplo, 0 igual a un número distinto de 0). O bien si, al resolver, una incógnita toma dos valores distintos para poder cumplir todas las ecuaciones del sistema.

RESOLVER SISTEMAS 2X2 MEDIANTE REDUCCIÓN DE INCÓGNITAS

En Secundaria aprendimos los métodos de sustitución, igualación y reducción. Podemos seguir usándolos. No obstante, para acostumbrarnos al método de Gauss, los siguientes ejercicios los vamos a resolver aplicando varias veces reducción.

Con la letra F_i indicaremos la fila-i (ecuación-i) sobre la cual operamos durante el proceso de reducción.

$$\left\{\begin{array}{c} x-y=0 \\ 2x+y=2 \end{array}\right\} \to F_1' = 2\cdot F_1 \to \left\{\begin{array}{c} 2x-2y=0 \\ 2x+y=2 \end{array}\right\}$$

$$F_2' = F_2 - F_1 \to \left\{\begin{array}{c} 2x-2y=0 \\ 3y=2 \end{array}\right\}$$

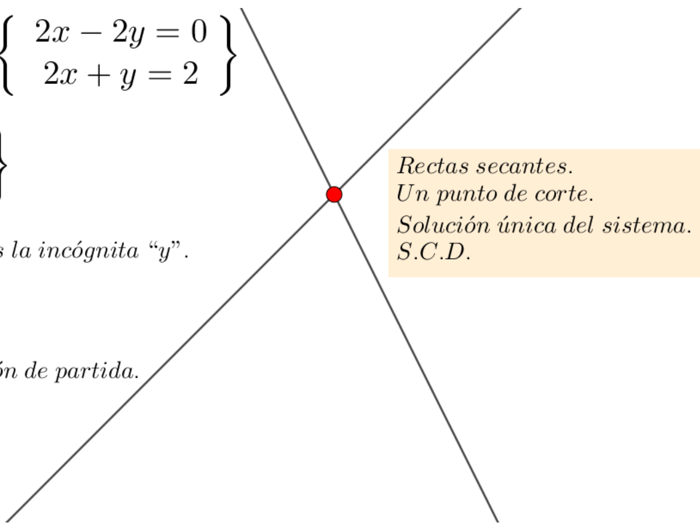
De la segunda ecuación (2ª fila) despejamos la incógnita "y".

$$3y = 2 \to y = 2/3$$

Sustituimos este valor en la primera ecuación de partida.

$$x - 2/3 = 0 \to x = 2/3$$

Solución general : $x = 2/3$, $y = 2/3$



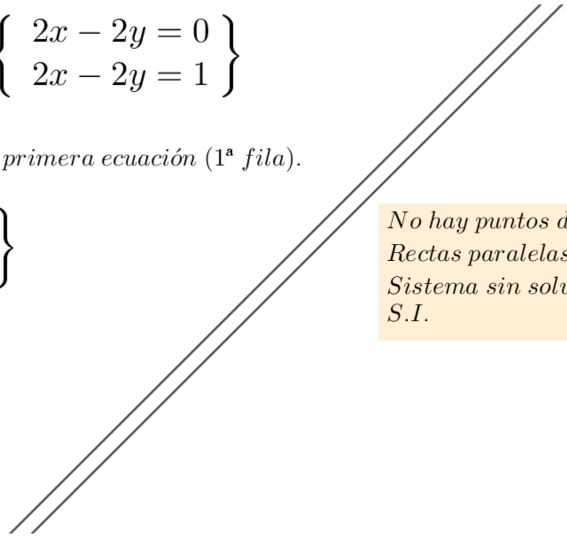
$$\left\{ \begin{array}{c} x-y=0 \\ 2x-2y=1 \end{array} \right\} \rightarrow F_1' = 2F_1 \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2x-2y=0 \\ 2x-2y=1 \end{array} \right\}$$

Restamos segunda ecuación (2ª fila) menos primera ecuación (1ª fila).

$$F_2' = F_2 - F_1 \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2x-2y=0 \\ 0=1 \end{array} \right\}$$

$$0 = 1 \rightarrow Absurdo\ matemático$$

En el momento que aparece un absurdo matemático significa que el sistema no tiene solución.



No hay puntos de corte.
Rectas paralelas.
Sistema sin solución.
S.I.

$$\left\{ \begin{array}{c} x-y=2 \\ 2x-2y=4 \end{array} \right\} \rightarrow F_1' = 2F_1 \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2x-2y=4 \\ 2x-2y=4 \end{array} \right\}$$

Restamos segunda ecuación (2ª fila) menos primera ecuación (1ª fila).

$$F_2' = F_2 - F_1 \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2x-2y=4 \\ 0=0 \end{array} \right\}$$

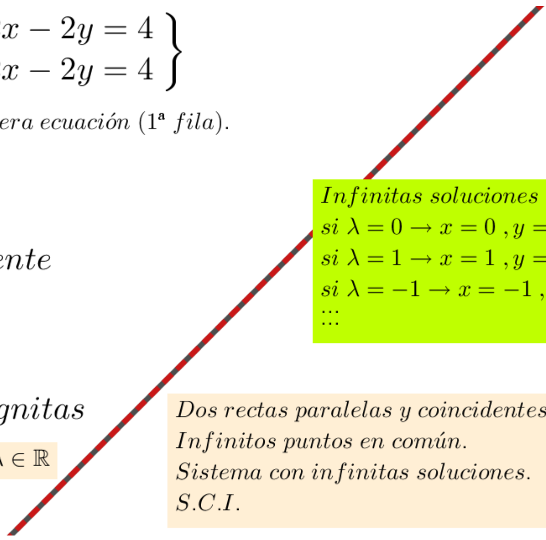
$$0 = 0 \rightarrow Tautología\ o\ verdad\ evidente$$

Siempre que aparece una tautología podemos obviar la fila correspondiente.

$$2x - 2y = 4 \rightarrow 1\ ecuación\ y\ 2\ incógnitas$$

$2 - 1 = 1$ *grado de libertad* $\rightarrow$ *Por ejemplo* : $x = \lambda \in \mathbb{R}$

Solución general : $x = \lambda\ ,\ y = \lambda - 2$



Infinitas soluciones :
si $\lambda = 0 \rightarrow x = 0\ , y = -2$
si $\lambda = 1 \rightarrow x = 1\ , y = -1$
si $\lambda = -1 \rightarrow x = -1\ , y = -3$
$\vdots$

Dos rectas paralelas y coincidentes.
Infinitos puntos en común.
Sistema con infinitas soluciones.
S.C.I.

SISTEMAS DE ECUACIONES 3X2 APLICANDO REDUCCIÓN

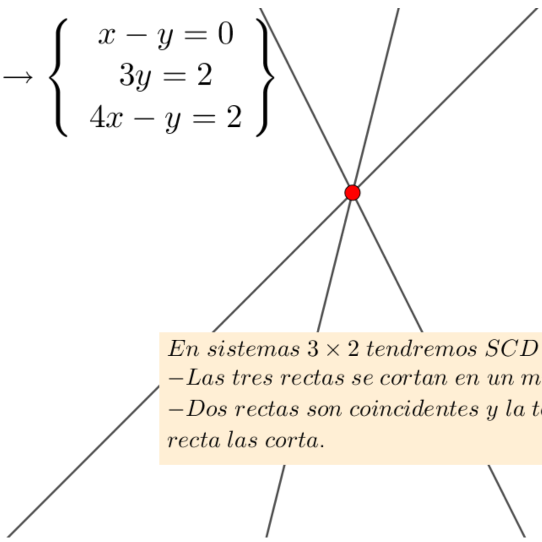
$$\left\{ \begin{array}{c} x-y=0 \\ 2x+y=2 \\ 4x-y=2 \end{array} \right\} \rightarrow F_2' = F_2 - 2 \cdot F_1 \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x-y=0 \\ 3y=2 \\ 4x-y=2 \end{array} \right\}$$

$$F_3' = F_3 - 4 \cdot F_1 \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x-y=0 \\ 3y=2 \\ 3y=2 \end{array} \right\}$$

$$F_3' = F_3 - F_2 \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x-y=0 \\ 3y=2 \\ 0=0 \end{array} \right\}$$

Obviamos F_3. *Despejamos "y" de* F_2

$$F_2 : y = 2/3 \rightarrow F_1 : x = 2/3$$



En sistemas 3×2 *tendremos SCD si :*
−Las tres rectas se cortan en un mismo punto.
−Dos rectas son coincidentes y la tercera recta las corta.

En el proceso de reducción seguido en el sistema anterior, primero hemos eliminado la incógnita "x" de la segunda ecuación. Y, en segundo lugar, hemos eliminado la incógnita "x" de la tercera ecuación.

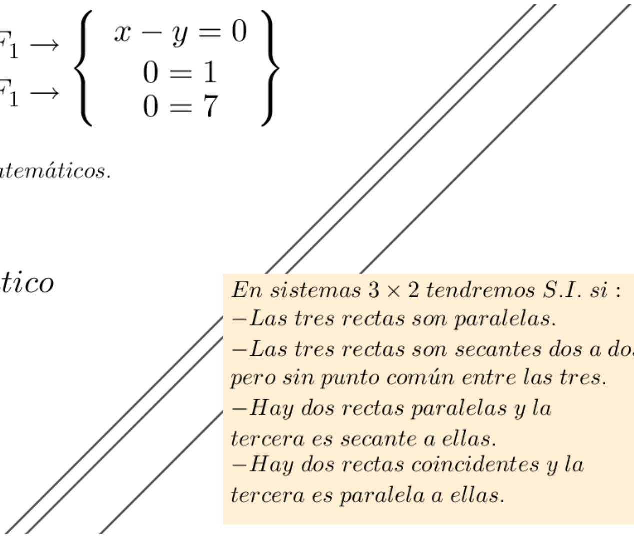
Aparece una tautología 0=0 en la tercera fila, por lo que podemos eliminar la tercera ecuación.

De la segunda ecuación podemos despejar directamente el valor de la variable "y". Y llevar ese valor a la primera ecuación para despejar el valor de la incógnita "x".

$$\left\{\begin{array}{c} x-y=0 \\ 2x-2y=1 \\ 3x-3y=7 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{c} F_2' = F_2 - 2F_1 \rightarrow \\ F_3' = F_3 - 3F_1 \rightarrow \end{array} \left\{\begin{array}{c} x-y=0 \\ 0=1 \\ 0=7 \end{array}\right\}$$

Tanto en F_2 como en F_3 aparecen absurdos matemáticos.

Siempre, siempre, siempre
que aparezca un absurdo matemático
el sistema no tendrá solución.



En sistemas 3×2 tendremos S.I. si :
−Las tres rectas son paralelas.
−Las tres rectas son secantes dos a dos pero sin punto común entre las tres.
−Hay dos rectas paralelas y la tercera es secante a ellas.
−Hay dos rectas coincidentes y la tercera es paralela a ellas.

Finalmente, si tras aplicar el método de reducción aparecen dos tautologías 0=0 y llegamos a un sistema con una única ecuación y dos incógnitas, tendremos infinitas soluciones (SCI).

$$\left\{\begin{array}{c} x-y=2 \\ 2x-2y=4 \\ 5x-5y=10 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{c} F_2' = F_2 - 2\cdot F_1 \\ F_3' = F_3 - 5\cdot F_1 \end{array} \rightarrow \left\{\begin{array}{c} x-y=2 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{array}\right\}$$

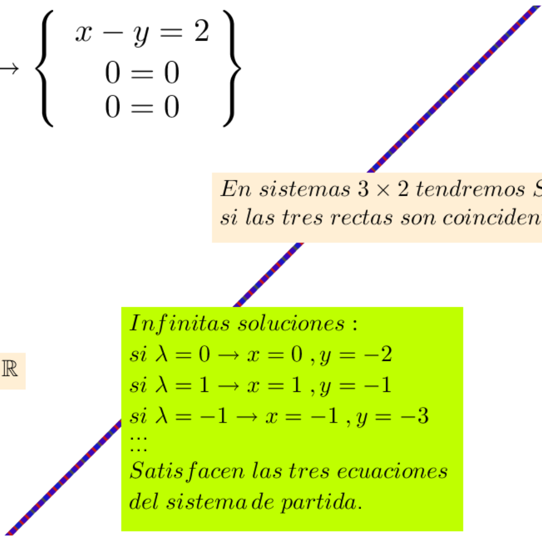
Podemos obviar F_2 y F_3 por tautologías.

$x - y = 2$

1 *ecuación y* 2 *incógnitas*

$2-1=1$ *grado de libertad* $\rightarrow$ *Por ejemplo* : $x = \lambda \in \mathbb{R}$

Solución general : $x = \lambda\ ,\ y = \lambda - 2$



En sistemas 3×2 tendremos SCI si las tres rectas son coincidentes.

Infinitas soluciones :
si $\lambda = 0 \rightarrow x = 0\ , y = -2$
si $\lambda = 1 \rightarrow x = 1\ , y = -1$
si $\lambda = -1 \rightarrow x = -1\ , y = -3$
...
Satisfacen las tres ecuaciones del sistema de partida.

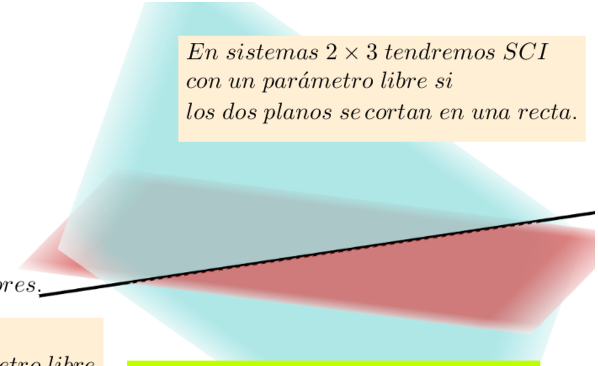
SISTEMAS DE ECUACIONES 2X3 POR REDUCCIÓN

En el siguiente ejemplo eliminamos, por reducción, la incógnita "y" y la incógnita "z" de la segunda ecuación.

$$\left\{ \begin{array}{c} x+y+2z=1 \\ x-y-3z=2 \end{array} \right\}$$

$$F_2'=F_2-F_1 \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x+y+2z=1 \\ -2y-5z=1 \end{array} \right\}$$

Si tras terminar Gauss y no aparecer absurdos matemáticos obtenemos más incógnitas que ecuaciones, tendremos un SCI con parámetros libres.



En sistemas 2×3 tendremos SCI con un parámetro libre si los dos planos se cortan en una recta.

3 incógnitas y 2 ecuaciones
$3-2=1$ grado de libertad $\rightarrow$ 1 incógnita como parámetro libre
y=λ∈ℝ

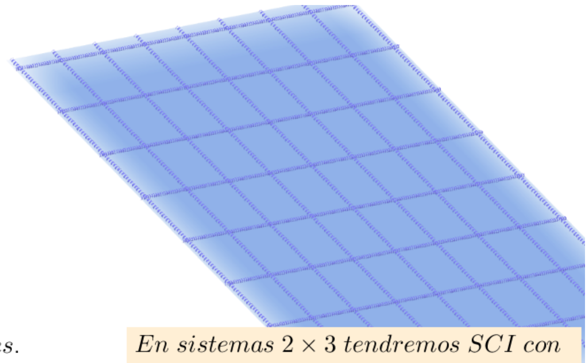
$$F_2: z=-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}\lambda \rightarrow F_1: x=1-\lambda+\frac{2}{5}+\frac{4}{5}\lambda \rightarrow x=\frac{7}{5}-\frac{1}{5}\lambda$$

Solución general: $\left\{ \begin{array}{c} x=\frac{7}{5}-\frac{1}{5}\lambda \\ y=\lambda\in\mathbb{R} \\ z=-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}\lambda \end{array} \right\}$

$$\left\{ \begin{array}{c} x-y+z=1 \\ 2x-2y+2z=2 \end{array} \right\}$$

$$F_2'=F_2-2F_1 \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x-y+z=1 \\ 0=0 \end{array} \right\}$$

Obviamos F_2 por tautología.
Si tras terminar Gauss y no aparecer absurdos matemáticos obtenemos más incógnitas que ecuaciones, tendremos un SCI con parámetros libres.



En sistemas 2×3 tendremos SCI con dos parámetros libres si los dos planos son coincidentes (superpuestos).

x-y+z=1
3 incógnitas y 1 ecuación
$3-1=2$ parámetros libres
x=α∈ℝ , y=β∈ℝ→z=1-α+β

Esta forma de aplicar reducción de manera sucesiva se conoce como método de Gauss. En este método podemos intercambiar la posición de las filas entre sí, y podemos intercambiar la posición de las columnas que almacenan las incógnitas.

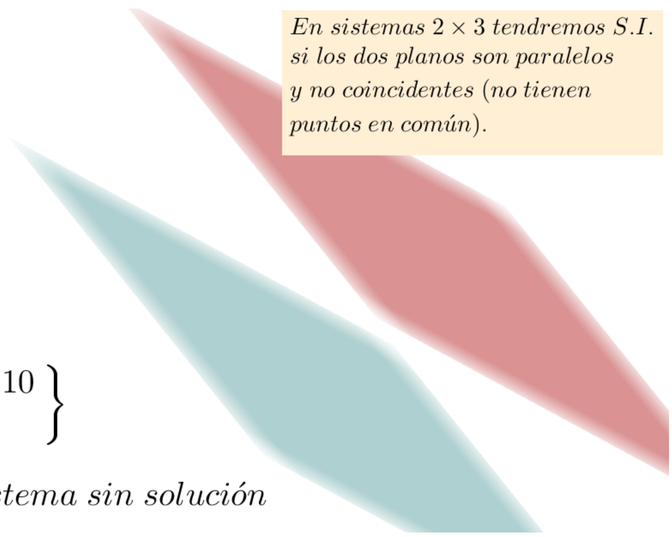
$$\left\{ \begin{array}{c} 4x+2y-4z=7 \\ 2x+y-2z=10 \end{array} \right\}$$

En el método de Gauss podemos intercambiar el orden de las ecuaciones (filas) y también cambiar el orden de las incógnitas (columnas). Por ejemplo: $F_1 \leftrightarrow F_2$

$$\left\{ \begin{array}{c} 2x+y-2z=10 \\ 4x+2y-4z=7 \end{array} \right\}$$

$$F_2'=F_2-2\cdot F_1 \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2x+y-2z=10 \\ 0=-13 \end{array} \right\}$$

$$0=-13 \rightarrow Aparece\ absurdo \rightarrow Sistema\ sin\ solución$$



En sistemas 2×3 tendremos S.I. si los dos planos son paralelos y no coincidentes (no tienen puntos en común).

NOTACIÓN MATRICIAL DE UN SISTEMA LINEAL

Un conjunto de m ecuaciones lineales con n incógnitas cada una, forma un sistema de ecuaciones lineales $m \times n$.

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = c_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = c_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = c_m \end{pmatrix}$$

El término a_{ij} es el coeficiente de la ecuación i que acompaña a la incógnita x_j. El número i de la ecuación se denomina **fila**, y el valor j de la incógnita x_j se denomina **columna**. Los términos c_i se conocen como términos independientes.

Para representar el **sistema en forma matricial** tomamos únicamente los coeficientes a_{ij} y los ordenamos en filas y columnas:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \rightarrow \text{Forma matricial del sistema}$$

Si incluimos en la representación matricial del sistema la columna de términos independientes c_i tendremos su **matriz ampliada**:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & | \, c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & | \, c_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & | \, c_m \end{pmatrix} \rightarrow \text{Matriz ampliada del sistema}$$

Ejemplo de sistema 2x2:

$$\begin{Bmatrix} 3x - 4y = 2 \\ 12x - 16y = 8 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -4 \, | \, 2 \\ 12 & -16 | \, 8 \end{pmatrix}$$

Ejemplo de sistema 3x3:

$$\begin{Bmatrix} x + y + z = 4 \\ -x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \, | \, 4 \\ -1 & 2 & -1 | \, 0 \\ 2 & -1 & 2 \, | \, 0 \end{pmatrix}$$

SISTEMAS 3X3 POR MÉTODO DE GAUSS

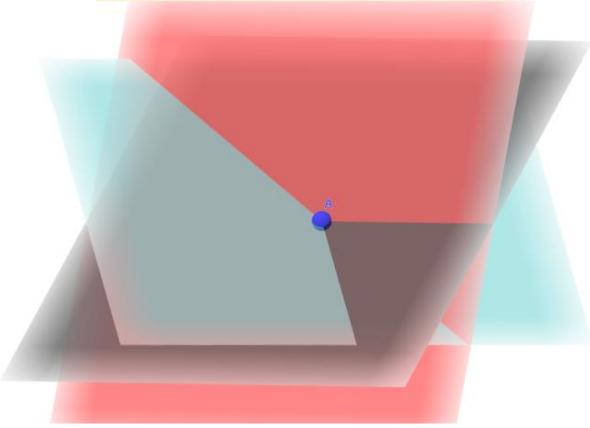
Sistemas de ecuaciones lineales 3 × 3.
Tres planos en el espacio tridimensional.

$$\left\{ \begin{array}{c} x+y+2z=6 \\ x+z=3 \\ -3x-z=-5 \end{array} \right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & -1 & -5 \end{array} \right)$$

En sistemas 3×3 tendremos SCD cuando los tres planos se corten en un único punto.

$$C_1 \leftrightarrow C_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -5 \end{array} \right)$$

$$F_3' = F_3 + 3F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right)$$



Rango 3 y 3 incógnitas
$SCD \rightarrow F_3 : z = 2 \rightarrow F_2 : x = 1 \rightarrow F_1 : y = 1$

Haciendo uso de la notación matricial, recuerda que en el método de Gauss podemos aplicar transformaciones lineales con las filas e incluso intercambiar la posición de las columnas de las distintas incógnitas.

¡Ojo! Si intercambias columnas, cuando vayas a resolver, no olvides cuál es la incógnita asociada a cada columna en la matriz triangular final del método de Gauss. En el ejemplo anterior, al resolver en la matriz final, de la segunda ecuación despejamos el valor de la incógnita "x" y no el valor de "y" porque hicimos un cambio entre la columna primera y segunda al inicio del método de Gauss.

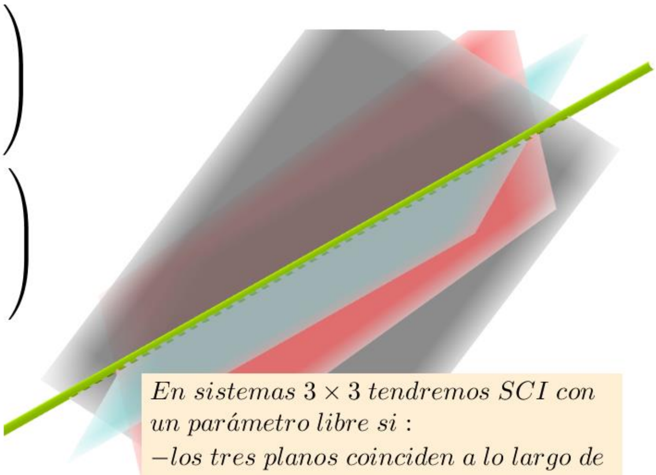
La potencia del método de Gauss radica en la sencillez de las operaciones y en la facilidad para despejar el valor de las incógnitas en la matriz final del sistema.

$$\left\{ \begin{array}{c} x+y+2z=6 \\ x+z=3 \\ 2z+y+3z=9 \end{array} \right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{c} F_2' = F_2 - F_1 \\ F_3' = F_3 - 2F_1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \end{array} \right)$$

$$F_2 = F_3 \rightarrow Podemos\ obviar\ F_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \end{array} \right)$$



En sistemas 3×3 tendremos SCI con un parámetro libre si :
−los tres planos coinciden a lo largo de una misma recta.
−dos planos son coincidentes y el tercer plano los corta.

Rango 2 y 3 incógnitas $\rightarrow$ SCI : $3 - 2 = 1$ parámetro libre
z=λ∈ℝ , y=3-λ, x=3-λ

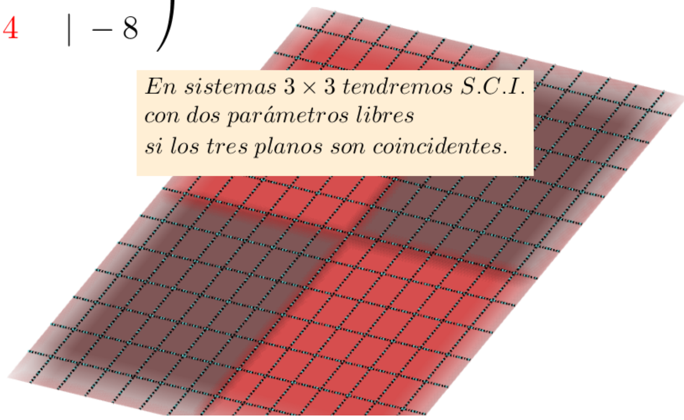
$$\left\{\begin{array}{c} 4x+2y-4z=8 \\ 2x+y-2z=4 \\ -4x-2y+4z=-8 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 4 & 2 & -4 & \mid 8 \\ 2 & 1 & -2 & \mid 4 \\ -4 & -2 & 4 & \mid -8 \end{array}\right)$$

$F_2 = \dfrac{1}{2}F_1 \rightarrow Obviar\ F_2$

$F_3 = -F_1 \rightarrow Obviar\ F_3$

$$\left(\begin{array}{cccc} 4 & 2 & -4 & \mid 8 \end{array}\right)$$

Rango 1 y 3 incógnitas
$SCI \rightarrow 3-1=2$ *parámetros libres*
$x=\alpha \in \mathbb{R},\ z=\beta \in \mathbb{R},\ y=4-2\alpha+2\beta$

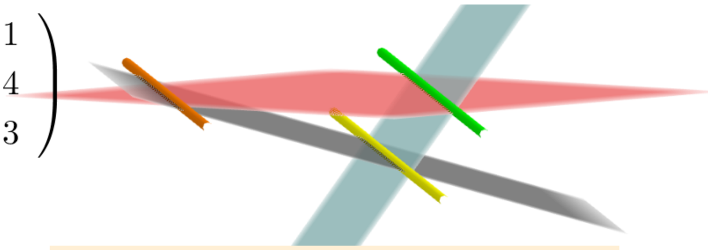


En sistemas 3×3 *tendremos S.C.I.*
con dos parámetros libres
si los tres planos son coincidentes.

$$\left\{\begin{array}{c} x+y-z=1 \\ x+y+5z=4 \\ z=3 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & \mid 1 \\ 1 & 1 & 5 & \mid 4 \\ 0 & 0 & 1 & \mid 3 \end{array}\right)$$

$$F_2' = F_2 - F_1 \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & \mid 1 \\ 0 & 0 & 6 & \mid 3 \\ 0 & 0 & 1 & \mid 3 \end{array}\right)$$

¡*Ojo, que aparece un absurdo matemático*!
$F_2: 6z=3 \rightarrow z=1/2$
$F_3: z=3$
Una incógnita puede tomar como solución o un solo valor o infinitos valores.
Pero no puede tomar dos valores diferentes.



Tres planos forman un S.I. al no contar con puntos comunes a los tres planos.
Esto puede ocurrir si :
– Los tres planos son paralelos.
– Hay dos planos paralelos y el tercero los corta.
– Hay dos planos coincidentes y el tercero paralelo a ellos dos.
– Los tres planos se cortan dos a dos en distintas rectas que a su vez no se cortan entre sí.

SISTEMAS NO LINEALES

Si las incógnitas de un sistema se multiplican entre sí, o se dividen entre sí, o incluso si alguna incógnita aparece elevada a un exponente distinto de uno, estaremos ante un sistema no lineal.

Los sistemas no lineales pueden tener solución única, o dos soluciones, o tres soluciones… o infinitas soluciones, o no tener solución.

En la mayoría de los sistemas no lineales el método de Gauss no funciona. Suele ser recomendable aplicar sustitución: despejar de una ecuación el valor de una incógnita, y llevar ese valor al resto de incógnitas.

También puede funcionar, en algunos casos, dividir dos ecuaciones (dividimos los miembros de la izquierda y lo igualamos a la división de los miembros de la derecha). De esta forma, podríamos llegar a alguna nueva relación entre las incógnitas que nos ayude a resolver el sistema.

Ejemplo resuelto de sistema no lineal:

Resuelve $\left\{\begin{matrix} \boldsymbol{x^2 - y^2 = \frac{143}{9}} \\ \boldsymbol{(x-y)^2 = \frac{121}{9}} \end{matrix}\right\}$

En la primera ecuación reconocemos el binomio "suma por diferencia" $(x-y)(x+y)$. Para obtener una relación sencilla de una de las incógnitas, dividimos miembro a miembro las dos ecuaciones.

$$\frac{(x+y)(x-y)}{(x-y)^2} = \frac{143}{121}$$

Simplificando.

$$121(x+y) = 143(x-y)$$

$$x = 12y$$

Sustituimos el valor obtenido para x en la primera ecuación del sistema, y obtenemos dos parejas de soluciones válidas.

$$(12y)^2 - y^2 = \frac{143}{9}$$

$$y^2 = \frac{1}{9}$$

$$y_1 = \frac{1}{3} \rightarrow x_1 = 4$$

$$y_1 = \frac{-1}{3} \rightarrow x_1 = -4$$