PROBABILIDAD.

1. INTRODUCCIÓN.

En el estudio de la mayoría de fenómenos científicos o de otra índole, puede suceder que al repetirlo bajo las mismas condiciones, se obtenga siempre el mismo resultado, como puede ser el realizar diversas medidas (*de masa, de volumen, etc.*), y denominamos experimentos deterministas, mientras que si al repetir dicho experimento en las mismas condiciones, su resultado está sujeto al azar, como puede ser el posible resultado al extraer una carta de la baraja o el lanzamiento de una moneda o un dado, o prever la climatología que puede hacer los próximos días, y denominamos experimentos aleatorios.

Algunos fenómenos o experimentos aleatorios son por ejemplo, lanzar tres monedas supuestamente equilibradas y estudiar la posibilidad de obtener tres caras, estudiar si es mas probable que al nacer un bebé en España que sea hombre o mujer, o estudiar la posibilidad de que en los próximos años se pueda curar el cáncer.

En el primer caso de las monedas, podemos afirmar que es $\frac{1}{8}$, mientras que en el caso del bebé podemos afirmar, que la probabilidad actual (*2022*) en España de nacer varón es ligeramente superior a $\frac{1}{2}$, y también podemos afirmar de que en los próximos años la probabilidad de que se pueda curar el cáncer es pequeña.

Podemos observar, que mientras que la primera afirmación se refiere a una probabilidad que podemos llamar clásica (fenómenos finitos y equiprobables), la segunda afirmación es de tipo frecuentista, y la tercera afirmación constituye un ejemplo de lo que podríamos denominar juicio o medida de credibilidad, que es una medida de grado de confianza que tenemos de la verdad de una cierta proposición.

Los orígenes de la probabilidad se remontan al estudio de los juegos de azar en el siglo XVII. Inicialmente, se estudiaban sobre todo experimentos equiprobables y frecuentistas, y posteriormente, con la profundización de dicha disciplina se estudiaron experimentos más complejos, que contribuyeron al profundización y estudio de la teoría de la probabilidad. Además, ligado a la aparición de esta teoría, se potenció las técnicas de conteo, como los métodos combinatorios.

2. ESPACIO MUESTRAL Y CONJUNTO DE SUCESOS..

Cuando efectuamos un experimento aleatorio o estudiamos un fenómeno aleatorio, lo hacemos sobre un conjunto denominado ESPACIO MUESTRAL Ω , además, a un mismo experimento aleatorio, se le puede asociar distintos espacios muestrales, sobre todo dependiendo, de lo que queramos estudiar.

Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado supuestamente equilibrado, si queremos estudiar los posibles resultados, podemos tomar como espacio muestral $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, mientras que si solo queremos estudiar su paridad, podemos tomar $\Omega=\{PAR, IMPAR\}$, siendo $PAR=\{1,3,5\}$ e $IMPAR=\{2,4,6\}$.

El espacio muestral puede ser:

Finito.- Por ejemplo, si estudiamos los posibles resultados al lanzar un dado, podemos tomar $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.

Infinito numerable.- Por ejemplo, si estudiamos el experimento de lanzar un dado hasta obtener un 6, si consideramos los elementos 6 = {6} y N = {1,2,3,4,5}, podemos tomar $\Omega=\{6, N6, NN6, NNN6, NNNN6, NNNNN6, \ldots\}$

Continuo.- Por ejemplo, si estudiamos los minutos de espera en una parada de autobús entre las 8 horas y las 8 horas 30 minutos, podemos tomar $\Omega=\{(a,b]:(a,b]\subset[0,30]\}$.

Los **sucesos aleatorios** son elementos de un cierto conjunto de subconjuntos de Ω , al conjunto de sucesos lo denominamos $\mathcal{A}$.

- A los sucesos de un solo elemento se les denomina **sucesos elementales**.
- Al suceso Ω se le denomina **suceso seguro**.
- Al conjunto vacío $\emptyset$, se le denomina suceso imposible.

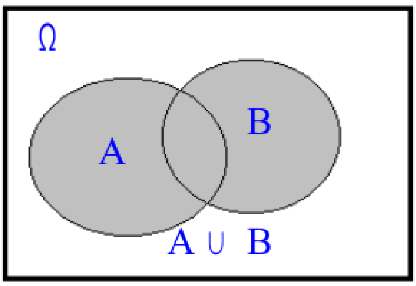
Hay que tener en cuenta que si $\mathcal{A}$ es el conjunto de sucesos de Ω, y $A, B \in \mathcal{A}$, los conjuntos **unión, complementario e intersección**, dados por $A\cup B, A\cap B \; y \; A^C$, también son elementos de $\mathcal{A}$, donde:

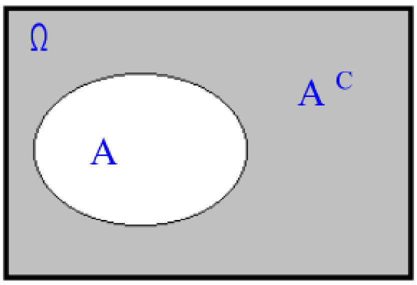
$$A\cup B=\{\omega\in\Omega:\omega\in A \; o \; \omega\in B\}$$

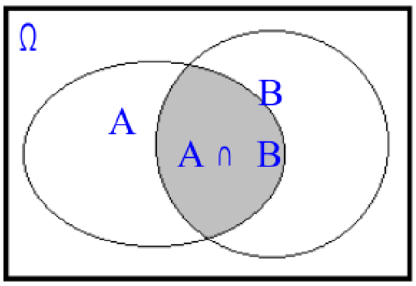
$$A\cap B=\{\omega\in\Omega:\omega\in A \; y \; \omega\in B\}$$

$$A^C=\{\omega\in\Omega:\omega\notin A\}$$

Utilizando los diagramas de Venn para conjuntos, podemos representar gráficamente estos sucesos mediante los siguientes gráficos:





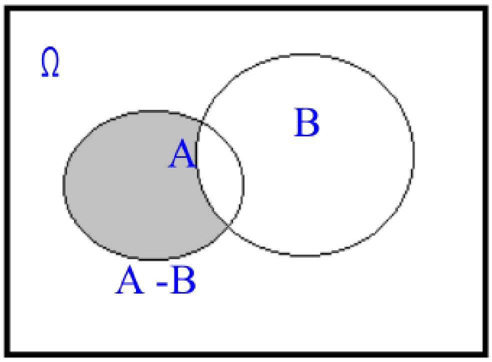


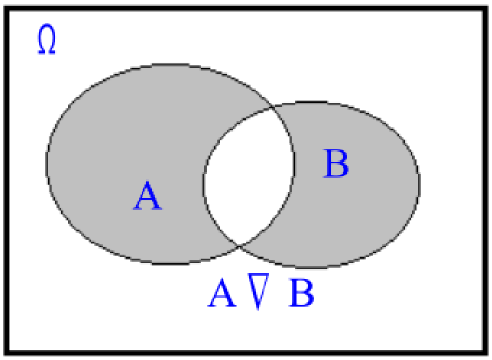
También se utiliza los sucesos denominados diferencia y diferencia simétrica, que en términos de conjuntos se definen por:

$$A-B=A\cap B^C$$

$$A\nabla B=(A-B)\cup(B-A)$$

Mediante la representación de diagramas de Venn para conjuntos podemos representar





En particular, entre los distintas estructuras de conjuntos posibles para $\mathcal{A}$, se suele utilizar el **Álgebra o** σ **-Álgebra**, (*según se consideren uniones finitas o infinitas de sucesos*) que cumple:

1.- $\Omega \in \mathcal{A}$.

2.- Para cualquier $A \in \mathcal{A}$, se cumple $A^C \in \mathcal{A}$.

3.- para cualquier sucesión de conjuntos $(A_n) \subset \mathcal{A}$ se cumple $\cup A_n \in \mathcal{A}$.

Cuando el contexto es experimental, solemos denominar **conjunto de sucesos.**

La elección de $\mathcal{A}$ depende del estudio que queramos realizar.

El conjunto de sucesos $\mathcal{A} \subset \Omega$, que en el caso de que:

- Ω sea **finito o numerable**, podemos tomar $\mathcal{A} = Partes(\Omega)$ (*si* Ω *tiene n elementos* $Partes(\Omega)$ tiene 2^n elementos).
- Ω sea **continuo**, dado que existen elementos $Partes(\Omega)$ (*sucesos singulares*) que no se les puede asignar una medida de probabilidad, siempre será $\mathcal{A} \neq Partes(\Omega)$.
  - En el caso particular de que $\Omega = \mathbb{R}$, se suele tomar $\mathcal{A}$ al conjunto generado por intersecciones finitas, de uniones de intervalos de la forma $(a, b] \subset \mathbb{R}$ y se denomina σ-álgebra de Borel real $B(\mathbb{R})$ **.**
  - En el caso particular de que $\Omega = \mathbb{R}^k, k \in \mathbb{N}$, se suele tomar $\mathcal{A}$ al conjunto generado por intersecciones finitas, de uniones de intervalos de la forma $(a_1, b_1] x (a_2, b_2] x (a_3, b_3] x \ldots x (a_{k1}, b_{k1}] \subset \mathbb{R}^k$ y se denomina σ-álgebra de Borel real k-dimensional $B(\mathbb{R}^k)$ **.**

Ejemplo.- Si consideramos los resultados que obtenemos al lanzar un dado, Ω *={1,2,3,4,5,6}, para efectuar un posible estudio probabilístico podemos tomar el conjunto de sucesos.*

Partes(Ω) = { {Ø}, {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6}, {1,2}, ... , Ω }

que tiene 2^6 *elementos.*

Cuando tenemos que efectuar estudios sobre sucesos, conviene tener en consideración si estos sucesos tienen elementos comunes o no.

Una familia $\{A_k\}$ (*finita o infinita numerable*) de sucesos de $\mathcal{A}$ son **sucesos incompatibles**, si son disjuntos dos a dos, es decir si se cumple:

$$A_i \cap A_j = \emptyset \ , \quad \forall i \neq j \ .$$

Ejemplo.- Si consideramos los resultados que obtenemos al lanzar un dado Ω = {1,2,3,4,5,6} y tomamos $\mathcal{A}$ = Partes(Ω) los sucesos

A = el resultado es múltiplo de dos.

B = el resultado es impar.

Son evidentemente incompatibles.

3. PROBABILIDAD.

La definición axiomática probabilidad (*se debe a Kolmogorov*) utiliza la estructura de **espacio probabilizable** (Ω, $\mathcal{A}$), donde Ω es un conjunto que denominamos **población** y $\mathcal{A}$ es una Álgebra o Álgebra de Ω , y define una función **P : Ω → [0,1]** sobre (Ω, $\mathcal{A}$) tal que cumple la **axiomática de Kolmogorov**:

Axioma.1.- ∀ ∈ $\mathcal{A}$, P(A) ≥ 0.

Axioma.2.- P(Ω) = 1.

Axioma.3.- Para toda sucesión $\{A_k\}$ (*finita o infinita numerable*) de sucesos incompatibles de $\mathcal{A}$ se cumple: $P(\cup A_i) = \sum_i P(A_i)$ (suma *finita o infinita*)

La terna (Ω,$\mathcal{A}$,P) se define como **espacio probabilizable**.

Ejemplo.- Si consideramos los resultados que obtenemos al lanzar una moneda supuestamente equilibrada. Definiendo:

Ω = { {cara} , { reverso } }.

(Ω, $\mathcal{A}$, P)= { {Ø} , {cara} , { reverso } , Ω }.

P la función de probabilidad tal que P({cara}) = P({ reverso }) = $\frac{1}{2}$.

La terna (Ω, $\mathcal{A}$, P) es un espacio probabilizable.