Teoría – Tema 5

Teoría - 10 - cambio de variable impar en seno

¿Qué es un cambio de variable?

Sea la integral arbitraria $\int f(x)dx$, donde $f(x)$ es una función de variable real x . Puede ocurrir que la forma de la función sea tan compleja que dificulte enormemente el cálculo de la integral indefinida. Y esta dificultad, a veces, puede resolverse realizando un cambio de variable adecuado.

Supongamos que expresamos la variable x en función de una función $g(t)$ que depende de la variable t . Si llevamos esta relación a la integral, tendremos:

$x=g(t) \quad \rightarrow \quad dx=g'(t)dt$ → Diferenciamos en función de x y en función de t

$f(x)=f[g(t)]$

$\int f(x)dx=\int f[g(t)]\cdot g'(t)dt$ → Integral que depende de la variable t

Si conseguimos resolver la integral en función de t , no debemos olvidar **deshacer al final el cambio de variable realizado**. Es decir:

$$x=g(t) \quad \rightarrow \quad g^{-1}(x)=t$$

En consecuencia, la función elegida para el cambio de variable **debe admitir función inversa**, para que podamos deshacer el cambio.

Si tras realizar el cambio de variable en la integral, obtenemos una expresión que depende tanto de x como de t … significa que el cambio de variable no es válido... tendremos que proponer otro.

¿Existe alguna **regla general** que nos permita saber **qué función debemos aplicar en el cambio de variable**? Lamentablemente no. Una posible ayuda es proponer una función que al diferenciar, el resultado de la derivada "se parezca" lo más posible a los términos que tenemos dentro de la integral.

Ejemplo 1 resuelto

$$\int \frac{tg[\ln(x)]}{x}dx$$

$$\ln x=t \quad \rightarrow \quad \frac{1}{x}dx=dt \quad \rightarrow \quad dx=x\cdot dt \quad \rightarrow \quad \int \frac{tg[\ln(x)]}{x}dx=\int \frac{tg[t]\cdot x}{x}dt=\int tg(t)dt$$

$\int tg(t)dt=\int \frac{sen\,t}{\cos t}dt=-\ln|\cos(t)|+C$ → deshacer cambio → $-\ln|\cos[\ln(x)]|+C$

Cambio de variable si f(x) es impar en seno

La función $f(x)$ que deseamos integrar es impar en seno si cumple que al sustituir $sen(x)$ por $-sen(x)$, la función cambia de signo. En este caso el cambio de variable a realizar es:

$$\cos(x)=t$$

Ejemplo 2 resuelto

$$\int sen^3 x \cdot \cos^4 x \, dx$$

$$\cos x = t \quad \rightarrow \quad -sen\, x\, dx = dt \quad \rightarrow \quad dx = \frac{dt}{-sen\, x}$$

$$\int sen^3 x \cdot \cos^4 x \, dx = \int sen^3 x \cdot t^4 \frac{dt}{-sen\, x} = \int -sen^2 x \cdot t^4 \, dt = \int (\cos^2 x - 1) \cdot t^4 \, dt = \int (t^2 - 1) \cdot t^4 \, dt$$

$\int (t^6 - t^4) dt = \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + C$ → deshacer cambio → $\frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} + C$