Problemas – Tema 2

Problemas resueltos - 10 - seno, coseno y tangente de la suma y de la diferencia

1. Sabiendo que α y β dos ángulos del primer cuadrante que cumplen:

$$sen\,\alpha=\frac{3}{5} \quad , \quad \cos\beta=\frac{5}{13}$$

Calcular las siguientes razones trigonométricas:

a) $sen(\alpha+\beta)$ **b)** $\cos(\alpha-\beta)$ **c)** $tg(2\alpha)$ **d)** $sen(\frac{\beta}{2})$ **e)** $tg(\alpha)$

a) $sen(\alpha+\beta)=sen(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\cos(\alpha)\cdot sen(\beta)$

De la relación fundamental sabemos que el ángulo α cumple:

$$1=sen^2\alpha+\cos^2\alpha \;\rightarrow\; \cos^2\alpha=1-sen^2\alpha \;\rightarrow\; \cos^2\alpha=1-(\frac{3}{5})^2$$

Por lo tanto → $\cos\alpha=\pm(\frac{4}{5})$ → como el ángulo es del primer cuadrante → $\cos\alpha=\frac{4}{5}$

Razonando de manera análoga para el ángulo β:

$$1=sen^2\beta+\cos^2\beta \;\rightarrow\; sen^2\beta=1-\cos^2\beta \;\rightarrow\; sen^2\beta=1-(\frac{5}{13})^2$$

Por lo tanto → $sen\,\beta=\pm(\frac{12}{13})$ → como el ángulo es del primer cuadrante → $sen\,\beta=\frac{12}{13}$

Solución → $sen(\alpha+\beta)=sen(\alpha)\cdot\cos(\alpha)+sen(\beta)\cos(\beta)=\frac{63}{65}$

b) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+sen\,\alpha\cdot sen\,\beta=\dfrac{56}{65}$

c) $tg(2\alpha)=\dfrac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\,\alpha}=\dfrac{2\dfrac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}}{1-\left(\dfrac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}\right)^2}=\dfrac{24}{7}$

d) $sen\left(\dfrac{\beta}{2}\right)=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\beta}{2}}=\dfrac{\pm2\cdot\sqrt{13}}{13}$ → primer cuadrante → $sen\left(\dfrac{\beta}{2}\right)=\dfrac{2\cdot\sqrt{13}}{13}$

e) $tg(\alpha)=\dfrac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}=\dfrac{3}{4}$

2. Obtén el ángulo x que cumpla $4 \cdot sen(x) = sen(2x)$.

Usamos la relación del seno del ángulo doble.

$$4 \cdot sen(x) = 2 \cdot sen(x) \cdot \cos(x) \;\rightarrow\; 2 \cdot sen(x) - sen(x) \cdot \cos(x) = 0 \;\rightarrow\; sen(x)(2 - \cos(x)) = 0$$

Igualamos cada factor de la multiplicación a 0.

$sen(x) = 0 \;\rightarrow\; x = 0º, 180º, 360º... \;\rightarrow\; x = 0º + 180º\,k, k \in \mathbb{Z}$

$2 - \cos(x) = 0 \;\rightarrow\; \cos(x) = 2$ → No existe solución → $-1 \leq \cos(x) \leq 1$

3. Siendo α y β dos ángulos del tercer cuadrante que cumplen $sen\,\alpha=\frac{-2}{5}$ **,** $\cos\beta=\frac{-1}{3}$ **, calcula las siguientes expresiones trigonométricas sin usar la calculadora. Si es necesario, deja el resultado final como una única fracción simplificada (no usar números decimales).**

a) $sen(\alpha+\beta)$

b) $\cos(\alpha-\beta)$

a) Al desarrollar el seno de la suma vamos a necesitar los valores de los senos y cosenos de los ángulos de partida. Para esto, usamos la relación fundamental de trigonometría.

$sen\,\alpha=\frac{-2}{5}$ → usamos relación fundamental $1=\cos^2(\alpha)+sen^2(\alpha)$

$$\cos(\alpha)=\pm\sqrt{1-sen^2(\alpha)} \rightarrow \cos(\alpha)=\pm\sqrt{1-\frac{4}{25}} \rightarrow \cos(\alpha)=\pm\sqrt{\frac{21}{25}} \rightarrow \cos(\alpha)=\frac{\pm\sqrt{21}}{5}$$

Nos quedamos con la opción negativa por pertenecer al tercer cuadrante .

$$\cos(\alpha)=\frac{-\sqrt{21}}{5}$$

$$\cos\beta=\frac{-1}{3} \rightarrow sen(\beta)=\pm\sqrt{1-\cos^2(\beta)} \rightarrow sen(\beta)=\pm\sqrt{1-\frac{1}{9}} \rightarrow sen(\beta)=\frac{\pm\sqrt{8}}{3}$$

Nos quedamos con la opción negativa por pertenecer al tercer cuadrante .

$$sen(\beta)=\frac{-\sqrt{8}}{3}$$

$$sen(\alpha+\beta)=sen\,\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot sen\,\beta=\frac{-2}{5}\cdot\frac{-1}{3}+\frac{-\sqrt{21}}{5}\cdot\frac{-\sqrt{8}}{3}=\frac{2+\sqrt{168}}{15}$$

b) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+sen\,\alpha\cdot sen\,\beta=\frac{-\sqrt{21}}{5}\cdot\frac{-1}{3}+\frac{-2}{5}\frac{-\sqrt{8}}{3}=\frac{\sqrt{21}+2\sqrt{8}}{15}$

4. Sabiendo que $sen(x)=\frac{2}{3}$ **, siendo** x **un ángulo del primer cuadrante, calcula:**

a) $sen(2x)$ **b)** $\cos(\frac{x}{2})$ **c)** $tg(2x)$

a) $sen(x)=\frac{2}{3}$ → por la relación fundamental → $\cos(x)=\pm\sqrt{1-(\frac{2}{3})^2}=\pm\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\pm\sqrt{5}}{3}$

Tomamos el valor $\cos(x)=\frac{\sqrt{5}}{3}$ por ser x del primer cuadrante.

$$sen(2x)=2\cdot sen(x)\cdot\cos(x)=2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{4\cdot\sqrt{5}}{9}$$

b) $\cos(\frac{x}{2})=\pm\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{5}}{3}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}$

Tomamos el valor positivo porque la mitad de un ángulo del primer cuadrante, seguirá siendo del primer cuadrante.

$$\cos(\frac{x}{2})=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}$$

c) $tg(2x)=\frac{2\,tg(x)}{1-tg^2(x)}$, $tg(x)=\frac{sen(x)}{\cos(x)}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\cdot\sqrt{5}}{5}$

$$tg(2x)=\frac{2\cdot\frac{2\cdot\sqrt{5}}{5}}{1-(\frac{2\cdot\sqrt{5}}{5})^2}=\frac{\frac{4\cdot\sqrt{5}}{5}}{\frac{25-20}{25}}=4\cdot\sqrt{5}$$

5. Calcula a partir de los valores de las razones trigonométricas de los ángulos 30º, 45º y 60º.

a) sen 15º b) cos 75º c) tg 120º

a) $sen(15^o)$ → aplicamos la formula del seno de la suma

$$sen(a+b)=sen\,a\cdot\cos b+\cos a\cdot sen\,b$$
$$sen\,15^o=sen(45^o-30^o)$$
$$sen(45^o-30^o)=sen[45^o+(-30^o)]=sen\,45^o\cos(-30^o)+\cos(45^o)\,sen(-30^o)$$

Sustituimos $\cos(-30^o)=\cos(30^o)$, por ser el coseno función par.

Y sustituimos $sen(-30^o)=-sen(30^o)$, por ser el seno función impar.

Solución → $sen(45^o-30^o)=sen\,45^o\cos 30^o-\cos 45^o\,sen\,30^o\simeq 0{,}2588...$

b) $\cos 75^o$ → los ángulos 75º y 15º son complementarios, es decir, suman 90º.

Para ángulos complementarios se cumple $\cos 75^o=sen\,15^o$. Tomando la solución del apartado anterior:

Solución → $\cos 75^o=sen\,15^o\simeq 0{,}2588...$

c) $tg\,120^o$ → Los ángulos 120º y 60º son suplementarios, es decir, suman 180º.

Los ángulos suplementarios tienen el mismo valor del seno (misma proyección sobre el eje vertical en la circunferencia de radio unidad), y coseno opuestos. Por lo tanto, las tangentes son opuestas.

Solución → $tg\,120^o=-tg\,60^o\simeq -1{,}732...$

6. Sabiendo que el $sen\ (x)=\ 2/3$ **, siendo** x **un ángulo del primer cuadrante, calcula:**

a) $sen(2x)$ **b)** $\cos(\frac{x}{2})$ **c)** $tg(2x)$

a) A partir de la ecuación fundamental $1=\cos^2 x+sen^2 x$ podemos obtener el valor del coseno (si es del primer cuadrante, será positivo), y posteriormente la tangente mediante su definición de cociente entre seno y el coseno.

$$sen(x)=\frac{2}{3}$$

$$\cos(x)=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$tg(x)=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

De la relación del seno del ángulo doble sabemos:

$$sen\ (2x)=2\cdot sen(x)\cdot\cos(x)\ \rightarrow\ sen\ (2x)=\ 2.\ \frac{2}{3}\ .\ \frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{4.\ \sqrt{5}}{9}$$

b) De la relación del coseno del ángulo mitad sabemos:

$$\cos(\frac{x}{2})=+\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}\ \rightarrow\ \cos(\frac{x}{2})=+\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{5}}{3}}{2}}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}$$

c) De la tangente del ángulo doble sabemos:

$$tg(2x)=\frac{2\,tg(x)}{1-tg^2(x)}\ \rightarrow\ tg(2x)=\frac{2.\frac{2}{\sqrt{5}}}{1-(\frac{2}{\sqrt{5}})^2}=\frac{\frac{4}{\sqrt{5}}}{1-\frac{4}{5}}=\frac{\frac{4}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{5}}=\frac{20}{\sqrt{5}}=4\cdot\sqrt{5}$$