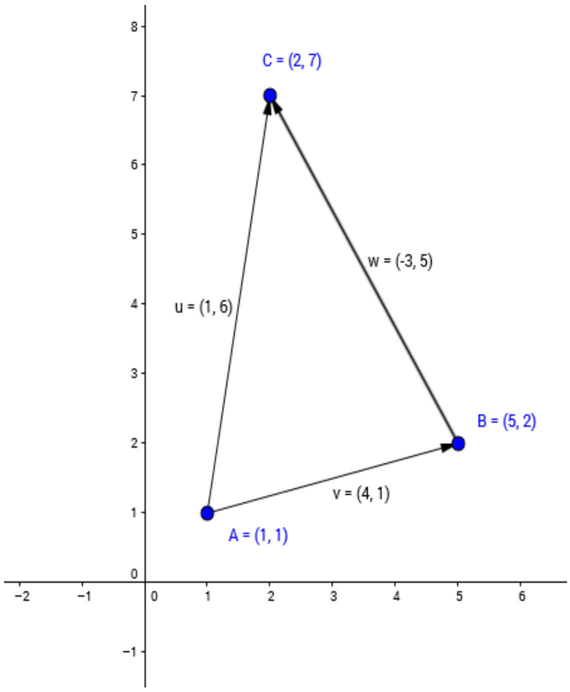
Problemas – Tema 5

Problemas resueltos - 1 - concepto de vector y dimensión del espacio vectorial

1. Dados los puntos en el plano $A(1,1)$, $B(5,2)$, $C(2,7)$ represéntalos gráficamente y halla las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$.

Para hallar un vector a partir de dos puntos, restamos las coordenadas x e y correspondientes de cada punto (punto final menos punto inicial)

$$\vec{AB}=(5-1,2-1)=(4,1)$$
$$\vec{AC}=(2-1,7-1)=(1,6)$$
$$\vec{BC}=(2-5,7-2)=(-3,5)$$



2. Calcula el valor de m para que $\vec{u}=(m,5)$ tenga por módulo 13 .

$$|\vec{u}|=13 \quad \rightarrow \quad \sqrt{m^2+25}=13 \quad \rightarrow \quad m^2+25=169 \quad \rightarrow \quad m^2=144 \quad \rightarrow \quad m=\pm 12$$

3. Dados los puntos $A(\frac{-1}{2},a)$, $B(1,0)$ y $C(\frac{-1}{2},-a)$, halla el valor de a para que el triángulo ABC sea equilátero.

El triángulo será equilátero si sus tres lados son iguales. La longitud de cada lado coincide con el módulo de los vectores que lo forman. Es decir:

$$\vec{AB}=(1+\frac{1}{2},0-a)=(\frac{3}{2},-a) \rightarrow |\vec{AB}|=\sqrt{\frac{9+4a^2}{4}}$$

$$\vec{AC}=(\frac{-1}{2}+\frac{1}{2},-a-a)=(0,-2\mathrm{a}) \rightarrow |\vec{AC}|=2a$$

$$\vec{BC}=(\frac{-1}{2}-1,-a-0)=(\frac{-3}{2},-a) \rightarrow |\vec{BC}|=\sqrt{\frac{9+4a^2}{4}}$$

Igualamos módulos para obtener lados de la misma longitud:

$$\sqrt{\frac{9+4a^2}{4}}=2a \rightarrow \frac{9+4a^2}{4}=4a^2 \rightarrow 9+4a^2=16a^2 \rightarrow a=\frac{\pm\sqrt{3}}{2}$$

4. Dado el triángulo de vértices $A(x,2), B(1,3)$ y $C(2,-1)$, halla el valor de x para que el triángulo ABC sea isósceles y su lado desigual sea $\overline{AC}$.

Si el triángulo es isósceles con lado desigual $\overline{AC}$, significa que los otros dos lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ deben tener igual longitud. Es decir, los vectores asociados tienen igual módulo.

$$|\vec{AB}|=\sqrt{(1-x)^2+1}=\sqrt{x^2-2x+2} \quad , \quad |\vec{BC}|=\sqrt{1+(-4)^2}=\sqrt{17}$$

Igualamos discriminantes de las raíces:

$$x^2-2x+2=17 \quad \rightarrow \quad x^2-2x-15=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{2\pm\sqrt{4+60}}{2}=\frac{2\pm 8}{2}$$

Solución → $x=5$, $x=-3$