PROPIEDADES DE PROBABILIDAD.

A partir de la definición axiomática de Kolmogorov, se puede demostrar que cumple las siguientes propiedades:

1. $P(\varnothing) = 0$

2. Para toda sucesión finita $\{A_n\}_{n=1}^{k}$ finita o infinita numerable de sucesos incompatibles de $\mathcal{A}$, se cumple: $\Rightarrow P\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) = \sum_{n=1}^{k} P(A_n)$

3. $\forall A \in \mathcal{A}$ $\Rightarrow P\left(A^C\right) = 1 - P(A)$

4. *Si* $A \subset B, A, B \in \mathcal{A}$ $\Rightarrow P(A) \leq P(B)$

5. *Si* $A, B \in \mathcal{A}$ $\Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

6. *Si* $A \in \mathcal{A}$ $\Rightarrow P(A) \leq 1$

7. *Si* $A, B \in \mathcal{A}$ $\Rightarrow P(A \cup B) \leq P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Generalización: Para toda sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{k} \subset \mathcal{A}$ *, se cumple:*

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) = \sum_{n=1}^{k} P(A_n) - \sum_{n_1 \neq n_2, n_1 < n_2; n_1 = 1}^{k} P\left(A_{n_1} \cap A_{n_2}\right) + \sum_{n_1 \neq n_2 \neq n_3, n_1 < n_2 < n_3, n_1 = 1}^{k} P\left(A_{n_1} \cap A_{n_2} \cap A_{n_3}\right)$$
$$+ (-1)^n P\left(\bigcap_{n=1}^{k} A_n\right)$$

8. *Si* $A, B \in \mathcal{A}$ $\Rightarrow P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

Generalización: Para toda sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{k} \subset \mathcal{A}$ *, se cumple:*

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{k} P(A_n)$$

9. $\forall \{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ $\Rightarrow P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ *(D. de Boole).*

9. $\forall \{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ $\Rightarrow P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} P\left(A_n^C\right)$

Demostración:

1. Tomando $X = A \cup \varnothing = A$.

   Por el axioma 3, se cumple:

   $$P(X) = P(A) + P(\varnothing) = P(A) \Rightarrow P(\varnothing) = 0$$

2. Tomando la sucesión infinita

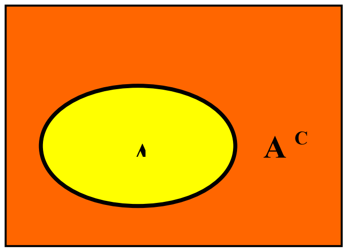
   $$X = \bigcup_{i=1}^{k} A_i, con\ A_i \bigcap_{i \neq j} A_j = \varnothing, i, j = 1, 2, \ldots, k.$$

   Por el axioma 3 es.

   $$P(X) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_k)$$

3. Como:

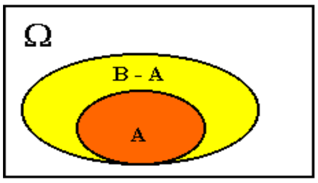
$$P(\Omega) = P(A \cup A^C) = P(A) + P(A^C) = 1$$



Y se tiene:

$$P(A^C) = 1 - P(A).$$

4. Si $A \subset B, B = A \cup (B - A)$



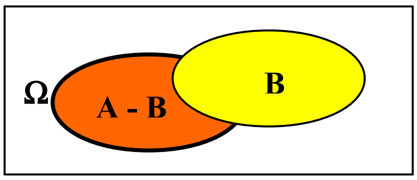
$$\Rightarrow P(B) = P(A) \cup P(B - A)$$

Por ser

$\Rightarrow P(B - A) \geq 0; A\ y\ B - A$ disjuntos. Es:

$$P(A) = P(B) - P(B - A) \leq P(B)$$

5. Como se puede poner, A, como unión de sucesos disjuntos:



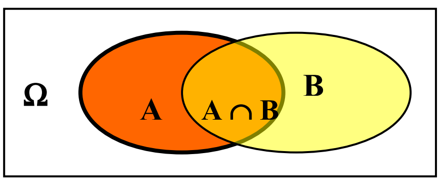
   $$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^C)$$

   $$\Rightarrow P(A) = P(A \cap B) + P(A - B) \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

6. Por la propiedad 4.

   $$A \subset \Omega \Rightarrow P(A) \leq P(\Omega) = 1$$

7. Poniendo los sucesos como unión de sucesos disjuntos:



   $$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^C)$$

$$\Rightarrow P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^C).$$

$$(1) \Rightarrow P(A \cap B^C) = P(A) - P(A \cap B).$$

$$B = (B \cap A) \cup (B \cap A^C)$$

$$\Rightarrow P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^C).$$

$$(2) \Rightarrow P(B \cap A^C) = P(B) - P(B \cap A).$$

$$A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap B^C) \cup (A^C \cap B)$$

$$(3) \Rightarrow P(A \cup B) = P(A \cap B) + P(A \cap B^C) + P(A^C \cap B).$$

Y sustituyendo (1) y (2) en el segundo miembro de la ecuación (3) es:

$$P(A \cup B) = P(A \cap B) + P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$$

Luego:, $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

→ ***Por recurrencia, se demuestra la generalización para n subconjuntos.***

8. Por 7. Dado que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B);\ P(A \cap B) \geq 0$$

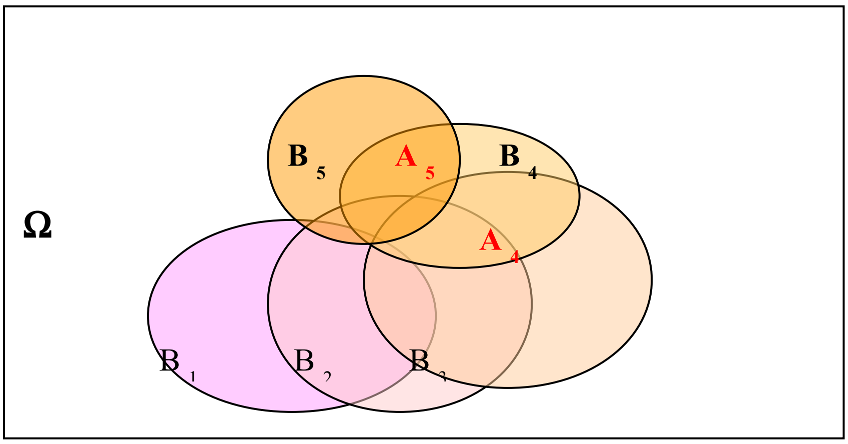
Se cumple:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)$$

→ *Por recurrencia, se demuestra la generalización para n subconjuntos.*

5. Basta tomar la sucesión $\{B_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$,

$B_1 = A_1$; $B_2 = A_2 - B_1$; $B_3 = A_3 - B_2$. ....



Quedando una sucesión $\{B_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ de sucesos disjuntos, tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

Y como por la propiedad 4. $P(A_n) \le P(B_n)$ para cada n, se cumple:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

10. Por ser $\sigma-$ Algebra; $\forall \{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \{A_n^C\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A} \Rightarrow$

Y dado que por la propiedad 3. :

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1 - P\left(\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^C\right) = 1 - P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^C\right)$$

Y como por la propiedad 9 es $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^C\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} P\left(A_n^C\right)$

Tenemos que:

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \ge 1 - \sum_{n=1}^{\infty} P\left(A_n^C\right)$$