Teoría – Tema 8

Teoría - 4 - Composición de funciones

Composición f[g(x)] y g[f(x)]. Definición de función inversa

Sean dos funciones $f(x)$ y $g(x)$. Componer ambas funciones significa obtener una nueva regla resultante de aplicar una función dentro de la otra. Con unos ejemplos lo entenderemos mejor.

Sea $f(x)=x^2$ y $g(x)=x-4$. Se define $g(x)$ compuesta con $f(x)$, y se escribe $(f\circ g)(x)\equiv f[g(x)]$, a la transformación:

$$(f\circ g)(x)\equiv f[g(x)]=f[x-4]=(x-4)^2$$

De igual forma, se define $f(x)$ compuesta con $g(x)$, y se escribe $(g\circ f)(x)\equiv g[f(x)]$, a la transformación:

$$(g\circ f)(x)\equiv g[f(x)]=g[x^2]=x^2-4$$

Si la composición de dos funciones es igual a la función identidad $y=x$ se dice que ambas funciones son inversas. Por ejemplo: $f(x)=x^2$ y $g(x)=\sqrt{x}$:

$$(f\circ g)(x)\equiv f[g(x)]=f[\sqrt{x}]=x$$
$$(g\circ f)(x)\equiv g[f(x)]=g[x^2]=x$$

No todas las funciones admiten inversa. Pero si existe, la inversa es única. Las condiciones que debe cumplir una función para admitir inversa las estudiaremos en 2ºBachillerato.

Dos funciones inversas cumplen, además, lo siguiente:

$$Dom[f(x)]=Imagen[f^{-1}(x)]$$
$$Imagen[f(x)]=Dominio[f^{-1}(x)]$$

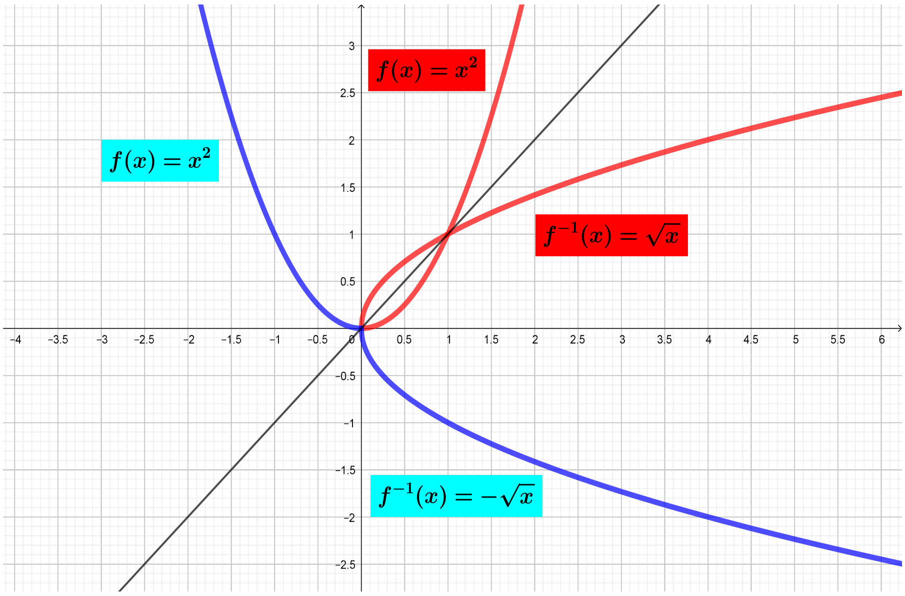
Dos funciones son inversas si sus gráficas se reflejan axialmente en la recta $y=x$. Así, por ejemplo, lo cumplen las gráficas de la exponencial y del logaritmo.

¡Un detalle, sobre el que ahondaremos en 2ºBachillerato!

La inversión de funciones de da según el dominio que consideremos. Por ejemplo, la función $f(x)=x^2$ tiene como inversa $f^{-1}(x)=\sqrt{(x)}$ en el dominio $[0,+\infty)$. Mientras que tiene como inversa $f^{-1}(x)=-\sqrt{(x)}$ en el dominio $(-\infty,0]$.

Las gráficas rojas son inversas para los reales mayores o iguales que cero.

Las gráficas azules son inversas para los reales menores o iguales que cero.



Dominio en la composición de funciones

Supongamos que nos piden obtener el dominio de la función $h(x)=x-2$. Fácilmente diríamos que son todos los valores reales por ser polinómica, ¿verdad? Eso es correcto.

Supongamos que nos dan dos funciones $f(x)=\frac{1}{x}$ y $g(x)=\frac{1}{x-2}$, y debemos estudiar el dominio de la composición $f[g(x)]$. Al operar tendríamos:

$$f[g(x)]=f[\frac{1}{x-2}]=\frac{1}{\frac{1}{x-2}}=x-2$$

¿Diríamos que el dominio son todos los reales, por ser una función polinómica?

Esta pregunta tiene trampa. Si lo que tengo es una composición de funciones no debo fijarme únicamente en la función final que obtengo, sino que debo estudiar de donde vengo.

Partimos de $g(x)=\frac{1}{x-2}$. Y sabemos que esta función es continua en todos los reales menos en $x=2$, por anular el denominador.

Y también tenemos $f(x)=\frac{1}{x}$, cuyo dominio son todos los reales menos $x=0$, por anular el denominador.

¿A qué conclusión llegamos?

El siguiente: el dominio en una composición de funciones $f[g(x)]$ son todos los valores que pertenecen al dominio de $g(x)$ (primera función que aplicamos) siempre que la imagen de $g(x)$ pertenezca a su vez al dominio de $f(x)$ (segunda función que aplicamos).

Formalmente se diría → $Dom[f[g(x)]]=x\in Dom[g(x)]/g(x)\in Dom[f(x)]$

En nuestro ejemplo tomamos $x\in\mathbb{R}-\{2\}$ por ser el dominio de $g(x)$ y quitaríamos además los valores que hiciesen $g(x)=0$, ya que el dominio de $f(x)$ es $x\in\mathbb{R}-\{0\}$.

Como $g(x)=\frac{1}{x-2}$ nunca se anula, concluimos → $Dom[f[g(x)]]=x\in\mathbb{R}-\{2\}$