CAPÍTULO VII

Funções Quadráticas

I. Definição

107. Uma aplicação f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ recebe o nome de *função quadrática* ou *do 2º grau* quando associa a cada $x \in \mathbb{R}$ o elemento $(ax^2 + bx + c) \in \mathbb{R}$, em que a, b, c são números reais dados e $a \neq 0$.

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c} \qquad (a \neq 0)$$

Exemplos de funções quadráticas:

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ em que $a = 1$, $b = -3$, $c = 2$
b) $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$ em que $a = 2$, $b = 4$, $c = -3$
c) $f(x) = -3x^2 + 5x - 1$ em que $a = -3$, $b = 5$, $c = -1$
d) $f(x) = x^2 - 4$ em que $a = 1$, $b = 0$, $c = -4$
e) $f(x) = -2x^2 + 5x$ em que $a = -2$, $b = 5$, $c = 0$
f) $f(x) = -3x^2$ em que $a = -3$, $b = 0$, $c = 0$

II. Gráfico

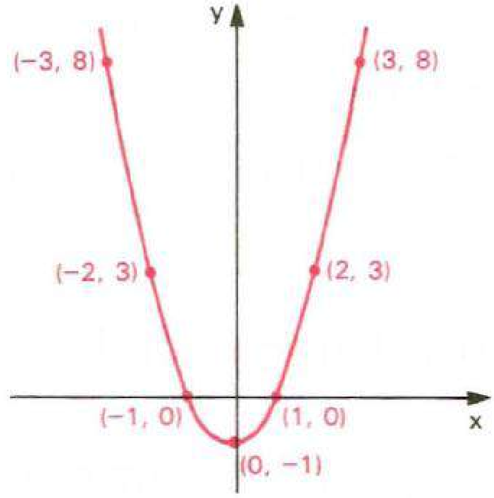
108. O gráfico da função quadrática é uma parábola. (*)

(*) Isso é provado no volume de Geometria Analítica desta coleção.

Exemplos

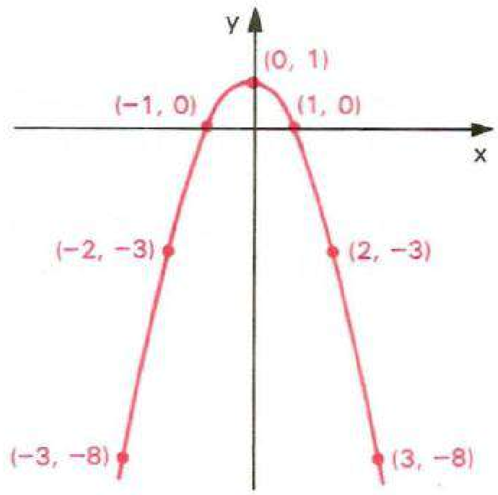
1º) Construir o gráfico de $y = x^2 - 1$.

x	$y = x^2 - 1$
−3	8
−2	3
−1	0
0	−1
1	0
2	3
3	8



2º) Construir o gráfico de $y = -x^2 + 1$.

x	$y = -x^2 + 1$
−3	−8
−2	−3
−1	0
0	1
1	0
2	−3
3	−8



EXERCÍCIOS

225. Construa os gráficos das funções definidas em $\mathbb{R}$:

a) $y = x^2$
b) $y = -x^2$
c) $y = 2x^2$
d) $y = -2x^2$
e) $y = x^2 - 2x$
f) $y = -2x^2 - 4x$
g) $y = -3x^2 - 3$
h) $y = x^2 - 2x + 4$

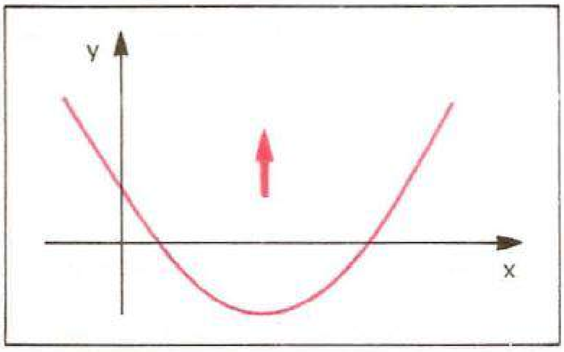
226. Em que condições a função quadrática $y = (m^2 - 4)x^2 - (m + 2)x - 1$ está definida?

227. Determine uma função quadrática tal que $f(-1) = -4$, $f(1) = 2$ e $f(2) = -1$.

228. Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$. Sabendo que $f(1) = 4$, $f(2) = 0$ e $f(3) = -2$, determine o produto abc.

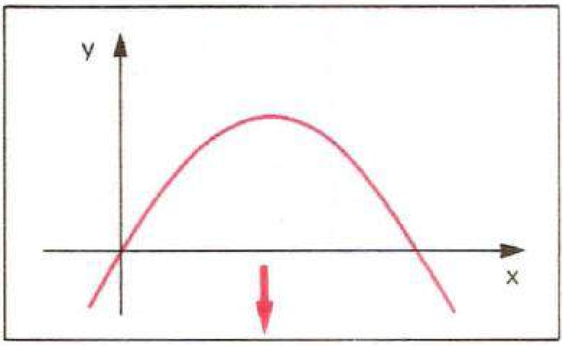
III. Concavidade

109. A parábola representativa da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ pode ter a concavidade voltada para "cima" ou voltada para "baixo".



Se $a > 0$, a concavidade da parábola está voltada para cima.

Se $a < 0$, a concavidade da parábola está voltada para baixo.



IV. Forma canônica

110. A construção do gráfico da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ com o auxílio de uma tabela de valores x e y, como foi feito no item anterior, torna-se às vezes um trabalho impreciso, pois na tabela atribuímos a x alguns valores inteiros e pode acontecer que em determinada função quadrática os valores de abscissa (valores de x), em que a parábola intercepta o eixo dos x ou a abscissa do ponto da parábola de maior ou menor ordenada, não são inteiros.

Para iniciarmos um estudo analítico mais detalhado da função quadrática, vamos primeiramente transformá-la em outra forma mais conveniente, chamada *forma canônica*.

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] =$$

$$= a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right]$$

Representando $b^2 - 4ac$ por Δ, também chamado discriminante do trinômio do segundo grau, temos a forma canônica.

$$\boxed{f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]}$$

V. Zeros

111. Os *zeros* ou *raízes* da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são os valores de x reais tais que $f(x) = 0$ e, portanto, as soluções da equação do segundo grau

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Utilizando a forma canônica, temos:

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0 \iff$$

$$\iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \iff$$

$$\iff x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \iff x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

112. *Número de raízes*

Observe que a existência de raízes reais para a equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ fica condicionada ao fato de $\sqrt{\Delta}$ ser real. Assim, temos três casos a considerar:

1º) $\Delta > 0$, a equação apresentará duas raízes distintas, que são:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

2º) $\Delta = 0$, a equação apresentará duas raízes iguais, que são:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}.$$

3º) $\Delta < 0$, sabendo que nesse caso $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$, diremos que a equação não apresenta raízes reais.

Resumo

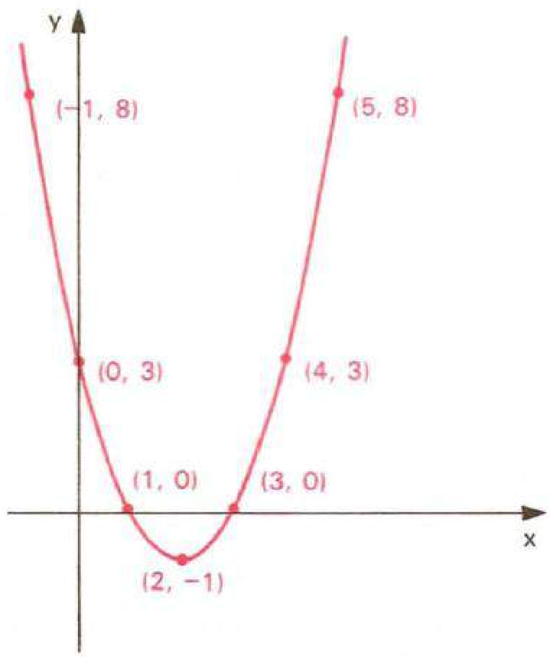
$$ax^2 + bx + c = 0 \iff \begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow x = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \Delta = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-b}{2a} \\ \Delta < 0 \Rightarrow \text{não existem raízes reais.} \end{cases}$$

113. Significado geométrico das raízes

Interpretando geometricamente, dizemos que os zeros da função quadrática são as abscissas dos pontos onde a parábola corta o eixo dos x.

Exemplo

Construindo o gráfico da função $y = x^2 - 4x + 3$ podemos notar que a parábola corta o eixo dos x nos pontos de abscissas 1 e 3, que são as raízes da equação $x^2 - 4x + 3 = 0$.



EXERCÍCIOS

229. Determine os zeros reais das funções:

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$
b) $f(x) = -x^2 + 7x - 12$
c) $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$
d) $f(x) = x^2 - 2x + 2$
e) $f(x) = x^2 + 4x + 4$
f) $f(x) = -x^2 + \frac{3}{2}x + 1$
g) $f(x) = x^2 - 2x - 1$
h) $f(x) = -x^2 + 3x - 4$
i) $f(x) = x^2 - \sqrt{2}x + \frac{1}{2}$
j) $f(x) = x^2 + (1 - \sqrt{3})x - \sqrt{3}$
k) $f(x) = 2x^2 - 4x$
l) $f(x) = -3x^2 + 6$
m) $f(x) = 4x^2 + 3$
n) $f(x) = -5x^2$

230. Uma empresa produz e vende determinado tipo de produto. A quantidade que ela consegue vender varia conforme o preço, da seguinte forma: a um preço y ela consegue vender x unidades do produto, de acordo com a equação $y = 50 - \frac{x}{2}$.

Sabendo que a receita (quantidade vendida vezes o preço de venda) obtida foi de *CR$ 1 250,00*, qual foi a quantidade vendida?

231. Resolva o sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{12} \\ x \cdot y = 12 \end{cases}$$

232. a) Resolva a equação $x^2 - 3x - 4 = 0$.

b) Resolva o sistema $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 2x + xy = -8 \end{cases}$.

233. Determine os zeros reais da função $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$.

Solução

Queremos determinar $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$.

Fazendo a substituição $z = x^2$, vem:

$$z^2 - 3z - 4 = 0$$

cuja solução é $z = 4$ ou $z = -1$, mas $z = x^2$; então:

$$x^2 = 4 \implies x = \pm 2$$

e

$$x^2 = -1 \implies \nexists\, x \in \mathbb{R}.$$

Logo, os zeros reais da função $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ são $x = 2$ e $x = -2$.

234. Determine os zeros reais das funções:

a) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$
b) $f(x) = -x^4 + 5x^2 + 36$
c) $f(x) = x^4 - x^2 - 6$
d) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$
e) $f(x) = 2x^4 + 6x^2 + 4$
f) $f(x) = -x^4 + 3x^2 - 3$
g) $f(x) = 3x^4 - 12x^2$
h) $f(x) = x^6 - 7x^3 - 8$

235. Determine os valores de m para que a função quadrática $f(x) = mx^2 + (2m - 1)x + (m - 2)$ tenha dois zeros reais e distintos.

Solução

Na função $f(x) = mx^2 + (2m - 1)x + (m - 2)$, temos:

$$a = m,\ b = 2m - 1,\ c = m - 2 \ \text{e}\ \Delta = 4m + 1.$$

Considerando que a função é quadrática e os zeros são reais e distintos, então:

$$a = m \neq 0 \quad \text{e} \quad \Delta = 4m + 1 > 0$$

ou seja:

$$m \neq 0 \quad \text{e} \quad m > -\frac{1}{4}.$$

236. Determine os valores de m para que a função quadrática $f(x) = (m - 1)x^2 + (2m + 3)x + m$ tenha dois zeros reais e distintos.

237. Determine os valores de m para que a equação do 2º grau $(m + 2)x^2 + (3 - 2m)x + (m - 1) = 0$ tenha raízes reais.

238. Determine os valores de m para que a função $f(x) = mx^2 + (m + 1)x + (m + 1)$ tenha um zero real duplo.

239. Determine os valores de m para que a equação $x^2 + (3m + 2)x + (m^2 + m + 2) = 0$ tenha duas raízes reais iguais.

240. Determine os valores de m para que a função $f(x) = (m + 1)x^2 + (2m + 3)x + (m - 1)$ não tenha zeros reais.

241. Determine os valores de m para que a equação $mx^2 + (2m - 1)x + (m - 2) = 0$ não tenha raízes reais.

242. O trinômio $ax^2 + bx + c$ tem duas raízes reais e distintas; α e β são dois números reais não nulos. O que se pode afirmar sobre as raízes do trinômio $\frac{a}{\alpha}x^2 + \beta bx + \alpha\beta^2 c$?

243. Mostre que na equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, de raízes reais x_1 e x_2, temos para a soma S das raízes $S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ e para produto P das raízes $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

244. Na equação do 2º grau $2x^2 - 5x - 1 = 0$, de raízes x_1 e x_2, calcule:

a) $x_1 + x_2$

b) $x_1 \cdot x_2$

c) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

d) $(x_1)^2 + (x_2)^2$

e) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$

f) $(x_1)^3 + (x_2)^3$

245. As raízes da equação $2x^2 - 2mx + 3 = 0$ são positivas e uma é o triplo da outra. Calcule o valor de m.

246. As raízes da equação $x^2 + bx + 47 = 0$ são inteiras. Calcule o módulo da diferença entre essas raízes.

247. Se r e s são as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ e $a \neq 0$ e $c \neq 0$, qual é o valor de $\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2}$?

248. Determine o parâmetro m na equação $x^2 + mx + m^2 - m - 12 = 0$, de modo que ele tenha uma raiz nula e a outra positiva.

249. Dadas as equações $x^2 - 5x + k = 0$ e $x^2 - 7x + 2k = 0$, sabe-se que uma das raízes da segunda equação é o dobro de uma das raízes da primeira equação. Sendo $k \neq 0$, determine k.

250. Mostre que uma equação do 2º grau de raízes x_1 e x_2 é a equação $x^2 - Sx + P = 0$ em que $S = x_1 + x_2$ e $P = x_1 \cdot x_2$.

251. Obtenha uma equação do segundo grau de raízes:

a) 2 e -3

b) $\frac{1}{2}$ e $-\frac{3}{2}$

c) $0{,}4$ e 5

d) 1 e $-\sqrt{2}$

e) $1 + \sqrt{3}$ e $1 - \sqrt{3}$

252. Se a equação $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, admite as raízes reais não nulas x_1 e x_2, obtenha a equação de raízes:

a) $(x_1)^2$ e $(x_2)^2$

b) $\frac{1}{x_1}$ e $\frac{1}{x_2}$

c) $\frac{x_1}{x_2}$ e $\frac{x_2}{x_1}$

d) $(x_1)^3$ e $(x_2)^3$

253. Determine m na equação $mx^2 - 2(m-1)x + m = 0$ para que se tenha $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 4$, em que x_1 e x_2 são as raízes da equação.

254. O trinômio $f(x) = x^2 - px + q$ tem por raízes a e b, $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Qual é o trinômio cujas raízes são $\frac{1}{a}$ e $\frac{1}{b}$?

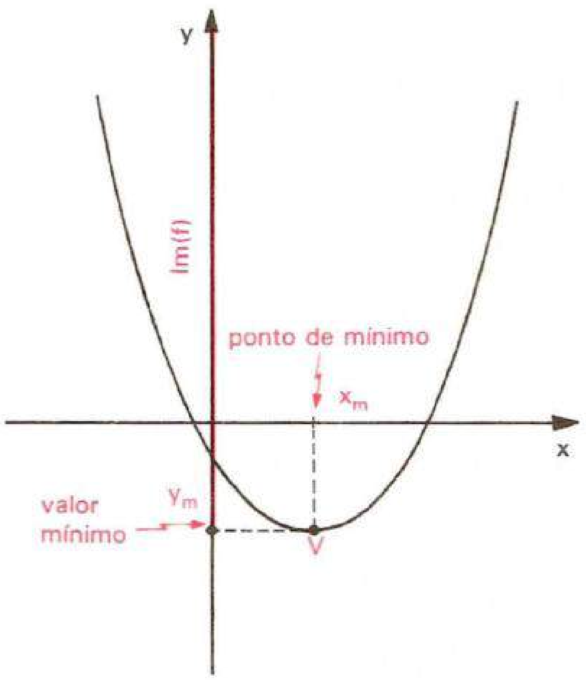
255. Sejam m, n dois números inteiros positivos tais que m, n são ímpares consecutivos e $m \cdot n = 1\,599$.
Indique o valor de $m + n$.

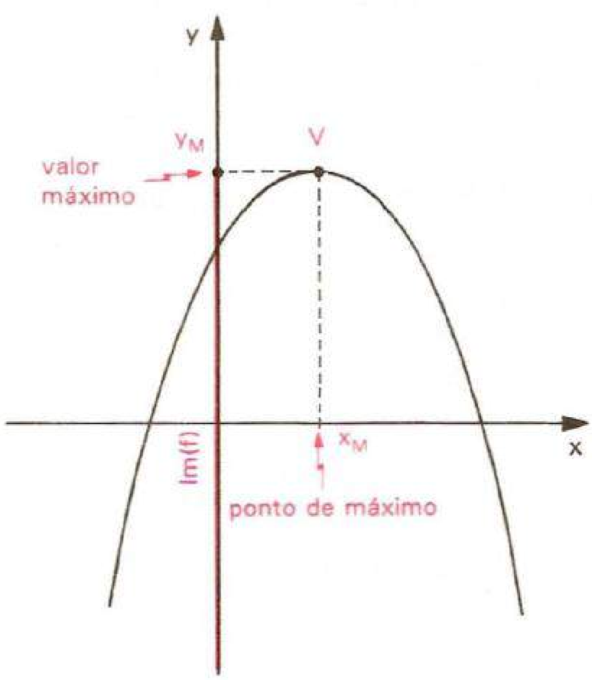
VI. Máximo e mínimo

114. *Definições*

Dizemos que o número $y_M \in Im(f)$ é o *valor máximo* da função $y = f(x)$ se, e somente se, $y_M \geqslant y$ para qualquer $y \in I_M(f)$. O número $x_M \in D(f)$ tal que $y_M = f(x_M)$ é chamado *ponto de máximo* da função.

Dizemos que o número $y_m \in Im(f)$ é o *valor mínimo* da função $y = f(x)$ se, e somente se, $y_m \leqslant y$ para qualquer $y \in I_m(f)$. O número $x_m \in D(f)$ tal que $y_m = f(x_m)$ é chamado *ponto de mínimo* da função.





115. Teoremas

I. Se $a < 0$, a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ admite o valor máximo $y_M = -\dfrac{\Delta}{4a}$ para $x_M = -\dfrac{b}{2a}$.

II. Se $a > 0$, a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ admite o valor mínimo $y_m = -\dfrac{\Delta}{4a}$ para $x_m = -\dfrac{b}{2a}$.

Demonstração

I. Consideremos a função quadrática na forma canônica:

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \qquad (1)$$

Sendo $a < 0$, o valor de y será tanto maior quanto menor for o valor da diferença $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}$.

Nessa diferença, $-\dfrac{\Delta}{4a^2}$ é constante (porque não depende de x; só depende de a, b, c) e $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$ para todo x real. Então a diferença assume o menor valor possível quando $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0$, ou seja, quando $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Para $x = -\dfrac{b}{2a}$, temos na expressão (1):

$$y = a\left[\left(-\frac{b}{2a} + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[0^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = -\frac{\Delta}{4a}.$$

II. Prova-se de modo análogo.

116. Aplicações

1º) Na função real $f(x) = 4x^2 - 4x - 8$, temos: $a = 4$, $b = -4$, $c = -8$ e $\Delta = 144$.

Como $a = 4 > 0$, a função admite um valor mínimo:

$$y_m = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-144}{4 \cdot 4}, \text{ isto é: } y_m = -9$$

em

$$x_m = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2 \cdot 4}, \text{ isto é: } x_m = \frac{1}{2}.$$

2º) Na função real $f(x) = -x^2 + x + \frac{3}{4}$, temos: $a = -1$, $b = 1$, $c = \frac{3}{4}$ e $\Delta = 4$.

Como $a = -1 < 0$, a função admite um valor máximo:

$$y_M = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-4}{4(-1)}, \text{ isto é: } y_M = 1$$

em

$$x_M = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2(-1)}, \text{ isto é: } x_M = \frac{1}{2}.$$

VII. Vértice da parábola

117. O ponto $V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ é chamado vértice da parábola representativa da função quadrática.

EXERCÍCIOS

256. Determine os vértices das parábolas:

a) $y = x^2 - 4$

b) $y = -x^2 + 3x$

c) $y = 2x^2 - 5x + 2$

d) $y = -x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

e) $y = -x^2 + x - \frac{2}{9}$

f) $y = x^2 - \frac{7}{3}x - 2$

257. Determine o valor máximo ou o valor mínimo e o ponto de máximo ou o ponto de mínimo das funções abaixo, definidas em $\mathbb{R}$.

a) $y = 2x^2 + 5x$

b) $y = -3x^2 + 12x$

c) $y = 4x^2 - 8x + 4$

d) $y = x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{5}{2}$

e) $y = -x^2 + 5x - 7$

f) $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{4}{3}x - \frac{1}{2}$

258. Determine o valor de m na função real $f(x) = 3x^2 - 2x + m$ para que o valor mínimo seja $\frac{5}{3}$.

259. Determine o valor de m na função real $f(x) = -3x^2 + 2(m-1)x + (m+1)$ para que o valor máximo seja 2.

260. Determine o valor de m na função real $f(x) = mx^2 + (m-1)x + (m+2)$ para que o valor máximo seja 2.

261. Determine o valor de m na função real $f(x) = (m-1)x^2 + (m+1)x - m$ para que o valor mínimo seja 1.

262. Dentre todos os números reais de soma 8, determine aqueles cujo produto é máximo.

Solução

Indicando por x e z esses números e por y o seu produto, temos:

$$x + z = 8 \qquad y = x \cdot z$$

Como precisamos ficar com uma só das variáveis, x ou z, fazemos

$$x + z = 8 \implies z = 8 - x$$

e portanto:

$$y = x \cdot z \implies y = x(8 - x) \implies y = -x^2 + 8x$$

Como $a = -1 < 0$, y é máximo quando

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2 \cdot (-1)} \implies x = 4.$$

Substituindo em $z = 8 - x$, vem $z = 4$.
Logo, os números procurados são 4 e 4.

263. Seja $y = -x^2 + 5x - 1$. Dado que x varia no intervalo fechado $[0, 6]$, determine o maior (y_M) e o menor (y_m) valor que y assume.

264. Dada $f(x) = 2x^2 + 7x - 15$, para que valor de x a função atinge um máximo?

265. A parábola de equação $y = -2x^2 + bx + c$ passa pelo ponto $(1, 0)$ e seu vértice é o ponto de coordenadas $(3, v)$. Determine v.

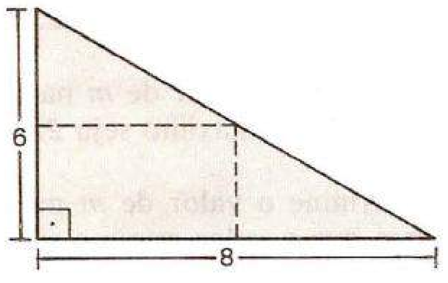
266. Dentre todos os números reais x e z tais que $2x + z = 8$, determine aqueles cujo produto é máximo.

267. Dentre todos os retângulos de perímetro $20\,cm$, determine o de área máxima.

268. Dentre todos os números x e z de soma 6, determine aqueles cuja soma dos quadrados é mínima.

269. Determine o retângulo de área máxima localizado no primeiro quadrante, com dois lados nos eixos cartesianos e um vértice na reta $y = -4x + 5$.

270. É dada uma folha de cartolina como na figura ao lado. Cortando a folha na linha pontilhada resultará um retângulo. Determine esse retângulo, sabendo que a área é máxima.



271. Determine o retângulo de maior área contido num triângulo equilátero de lado *4 cm*, estando a base do retângulo num lado do triângulo.

272. Num triângulo isósceles de base *6 cm* e altura *4 cm* está inscrito um retângulo. Determine o retângulo de área máxima, sabendo que a base do retângulo está sobre a base do triângulo.

273. Uma conta perfurada de um colar é enfiada em um arame fino com o formato da parábola $y = x^2 - 6$. Do ponto P de coordenadas $(4, 10)$ deixa-se a conta deslizar no arame até chegar ao ponto Q de ordenada -6. Qual é a distância horizontal percorrida pela conta (diferença entre as abscissas de P e Q)?

274. Uma parede de tijolos será usada como um dos lados de um curral retangular. Para os outros lados iremos usar *400* metros de tela de arame, de modo a produzir área máxima. Qual é o quociente de um lado pelo outro?

VIII. Imagem

118. Para determinarmos a imagem da função quadrática, tomemos inicialmente a função na forma canônica:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

ou seja, $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$. Observemos que $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$; então temos que considerar dois casos:

1º caso:

$a > 0 \implies a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$, e, portanto:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \geqslant \frac{-\Delta}{4a}.$$

2º caso:

$$a < 0 \implies a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leqslant 0, \text{ e, portanto:}$$

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \leqslant \frac{-\Delta}{4a}.$$

Resumindo:

$$a > 0 \implies y \geqslant \frac{-\Delta}{4a}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$a < 0 \implies y \leqslant \frac{-\Delta}{4a}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

ou ainda:

$$a > 0 \implies \text{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{\Delta}{4a}\right\}$$

$$a < 0 \implies \text{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -\frac{\Delta}{4a}\right\}$$

Exemplos

1º) Obter a imagem da função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$.

Na função $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$, temos:

$$a = 2, \quad b = -8 \quad e \quad c = 6$$

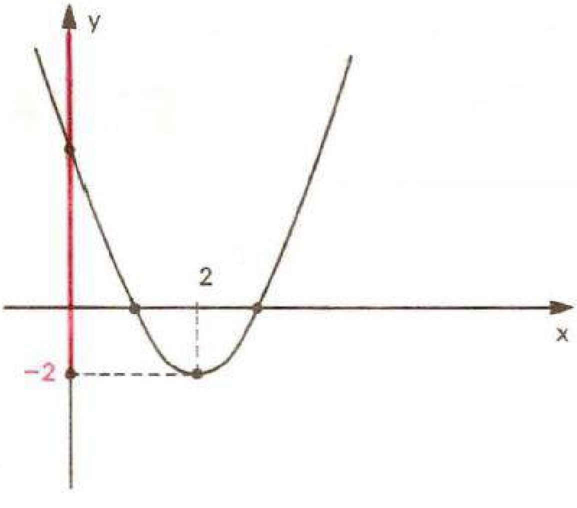
logo:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 16$$

e portanto: $\dfrac{-\Delta}{4a} = \dfrac{-16}{4 \cdot 2} = -2.$

Como $a = 2 > 0$, temos:

$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -2\}.$



2º) Obter a imagem da função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = -\dfrac{x^2}{3} + 2x - \dfrac{5}{3}$.

Na função $f(x) = -\dfrac{x^2}{3} + 2x - \dfrac{5}{3}$, temos:

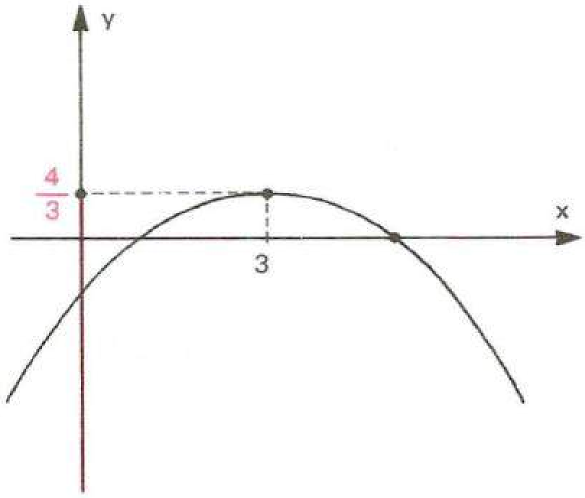
$$a = -\frac{1}{3}, \quad b = 2 \quad e \quad c = -\frac{5}{3}$$

logo:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{16}{9}$$

e portanto:

$$\frac{-\Delta}{4a} = \frac{-\dfrac{16}{9}}{4\left(\dfrac{-1}{3}\right)} = \frac{4}{3}.$$



Como $a = -\dfrac{1}{3} < 0$, temos:

$$Im(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant \frac{4}{3}\right\}.$$

EXERCÍCIOS

275. Determine a imagem das funções definidas em $\mathbb{R}$:

a) $y = x^2 - 3x$

b) $y = -x^2 + 4$

c) $y = 3x^2 - 9x + 6$

d) $y = -4x^2 + 8x + 12$

e) $y = -x^2 + \dfrac{3}{2}x + 1$

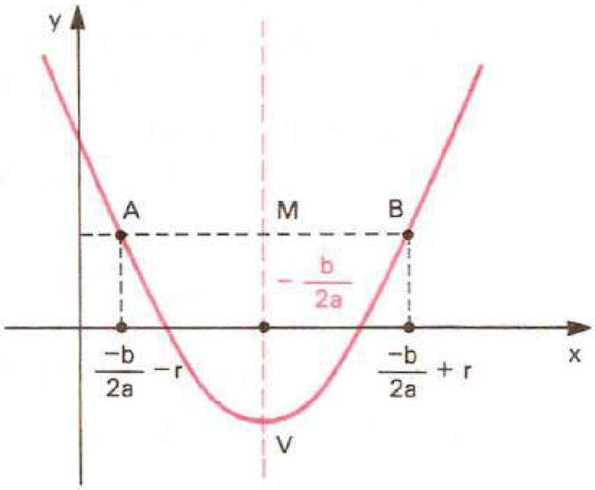
f) $y = \dfrac{1}{2}x^2 + x + 1$

276. Determine m na função $f(x) = 3x^2 - 4x + m$ definida em $\mathbb{R}$ para que a imagem seja $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 2\}$.

277. Determine m na função $f(x) = -\dfrac{x^2}{3} + mx - \dfrac{1}{2}$ definida em $\mathbb{R}$ para que a imagem seja $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 7\}$.

IX. Eixo de simetria

119. *Teorema*



"O gráfico da função quadrática admite um eixo de simetria perpendicular ao eixo dos x e que passa pelo vértice."

Os pontos da reta perpendicular ao eixo dos x e que passa pelo vértice da parábola obedecem à equação $x = \dfrac{-b}{2a}$, pois todos os pontos dessa reta têm abscissa $\dfrac{-b}{2a}$.

Para provarmos que a parábola tem eixo de simetria na reta $x = \dfrac{-b}{2a}$, devemos mostrar que dado um ponto $A\left(\dfrac{-b}{2a} - r, y\right)$, com $r \in \mathbb{R}$, pertencente ao gráfico da função, existe $B\left(\dfrac{-b}{2a} + r, y\right)$ também pertencente ao gráfico da função.

Tomando a função quadrática na forma canônica

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

e considerando que $A\left(\dfrac{-b}{2a} - r, y\right)$ pertence ao gráfico da função, temos:

$$y = f\left(\frac{-b}{2a} - r\right) = a\left[\left(\frac{-b}{2a} - r + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[(-r)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] =$$

$$= a\left[(r)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[\left(\frac{-b}{2a} + r + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = f\left(\frac{-b}{2a} + r\right)$$

provando que $B\left(\dfrac{-b}{2a} + r, y\right)$ também pertence ao gráfico da função.

X. Informações que auxiliam a construção do gráfico

120. Para fazermos o esboço do gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, buscaremos, daqui para a frente, informações preliminares, que são:

1º) O gráfico é uma parábola, cujo eixo de simetria é a reta $x = \frac{-b}{2a}$ perpendicular ao eixo dos x.

2º) Se $a > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima.
Se $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

3º) Zeros da função.

Se $\Delta > 0$, a parábola intercepta o eixo dos x em dois pontos distintos

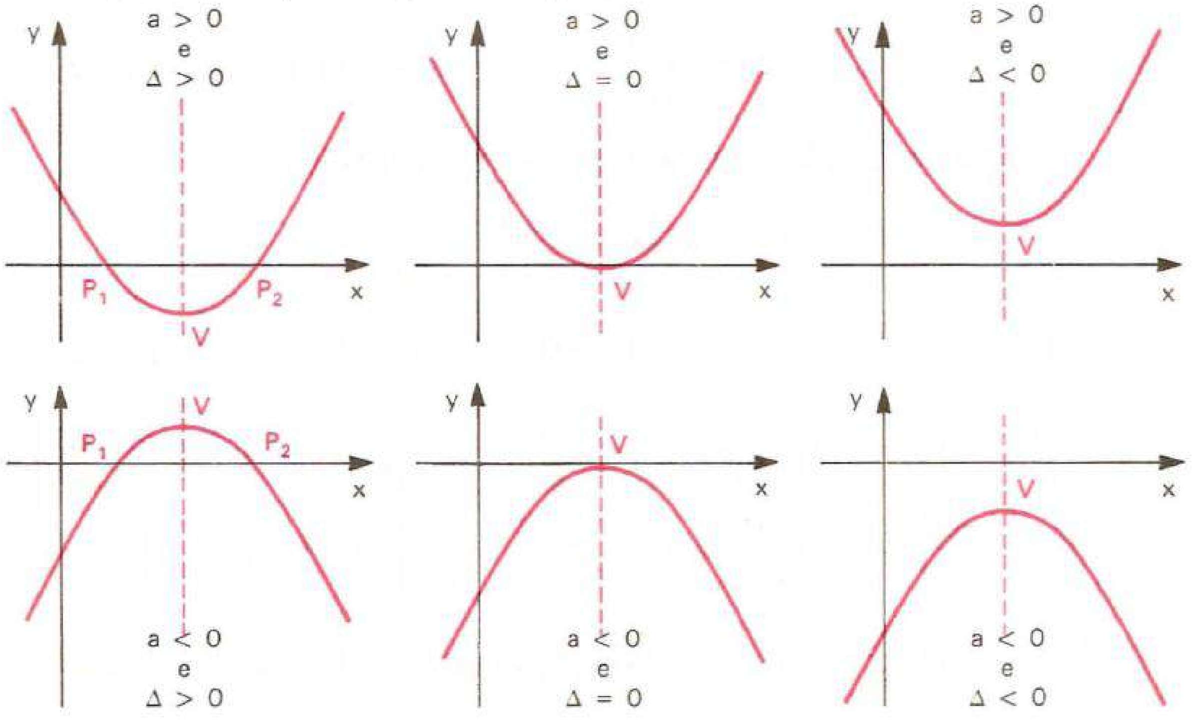
$$P_1\left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, 0\right) \quad e \quad P_2\left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, 0\right).$$

Se $\Delta = 0$, a parábola tangencia o eixo dos x no ponto $P\left(\frac{-b}{2a}, 0\right)$.

Se $\Delta < 0$, a parábola não tem pontos no eixo dos x.

4º) Vértice da parábola é o ponto $V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$, que é máximo se $a < 0$ ou é mínimo se $a > 0$.

Seguem os tipos de gráficos que podemos obter:



EXERCÍCIOS

278. Faça o esboço do gráfico da função $y = x^2 - 4x + 3$.

Solução

Concavidade

Como $a = 1 > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima.

Zeros da função

$x^2 - 4x + 3 = 0 \implies x = 1 \quad \text{ou} \quad x = 3$

Os pontos no eixo x são $P_1(1, 0)$ e $P_2(3, 0)$.

Vértice

Em $y = x^2 - 4x + 3$, temos

$a = 1$, $b = -4$, $c = 3$ e $\Delta = 4$.

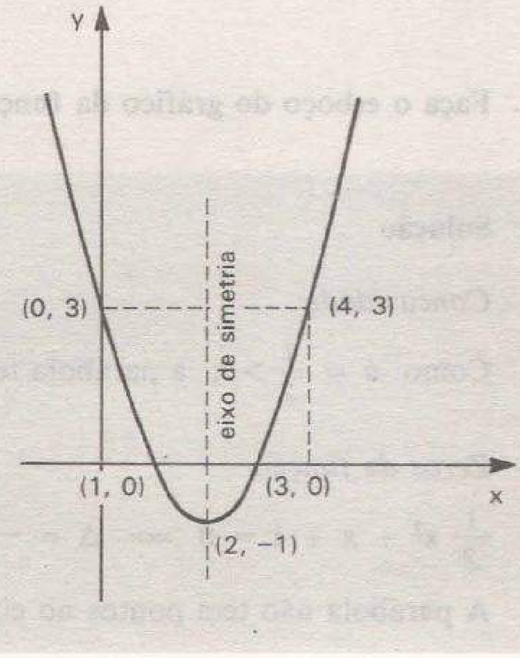
Como $\dfrac{-b}{2a} = \dfrac{4}{2 \cdot 1} = 2$ e $\dfrac{-\Delta}{4a} = \dfrac{-4}{4 \cdot 1} = -1$,

o vértice é $V(2, -1)$.

Gráfico

Observe que a parábola sempre intercepta o eixo y. Para determinarmos onde o faz, basta lembrar que o ponto situado no eixo y tem abscissa nula, logo $y(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3$, isto é, o ponto no eixo y é $(0, 3)$.

Determinado o ponto onde a parábola corta o eixo y, podemos determinar um outro ponto $(4, 3)$ da parábola, simétrico a $(0, 3)$ em relação à reta $x = 2$ (eixo de simetria da parábola).



279. Faça o esboço do gráfico da função $y = -x^2 + 4x - 4$.

Solução

Concavidade

Como $a = -1 < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

Zeros da função

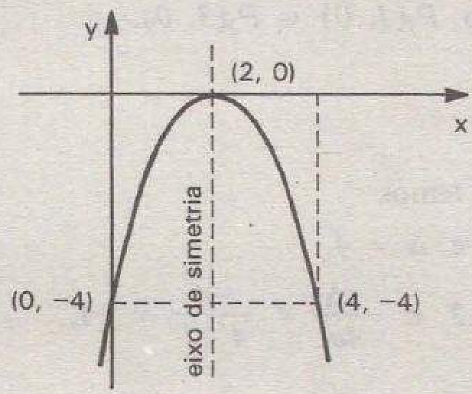
$-x^2 + 4x - 4 = 0 \implies x = 2$

A parábola admite um único ponto no eixo x, que é $P = (2, 0)$.

Vértice

Considerando que a parábola admite um único ponto no eixo x, então esse ponto é o vértice da parábola.

Gráfico



280. Faça o esboço do gráfico da função $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.

Solução

Concavidade

Como $a = \frac{1}{2} > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima.

Zeros da função

$\frac{1}{2}x^2 + x + 1 = 0 \implies \Delta = -1 < 0 \implies \nexists$ raízes reais.

A parábola não tem pontos no eixo dos x.

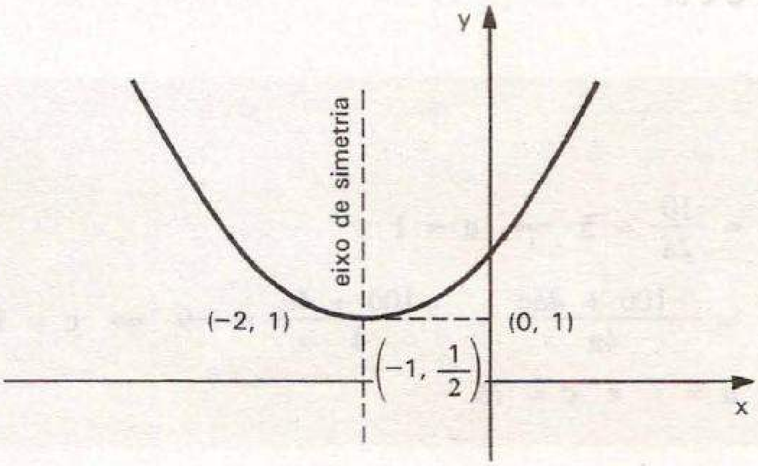
Vértice

Em $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$, temos:

$a = \frac{1}{2}$, $b = 1$, $c = 1$ e $\Delta = -1$.

Como $\frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2 \cdot \frac{1}{2}} = -1$ e $\frac{-\Delta}{4a} = \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$, o vértice é $V\left(-1, \frac{1}{2}\right)$.

Gráfico



281. Construa o gráfico cartesiano das funções definidas em $\mathbb{R}$:

a) $y = x^2 - 2x - 3$

b) $y = 4x^2 - 10x + 4$

c) $y = -x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

d) $y = -3x^2 + 6x - 3$

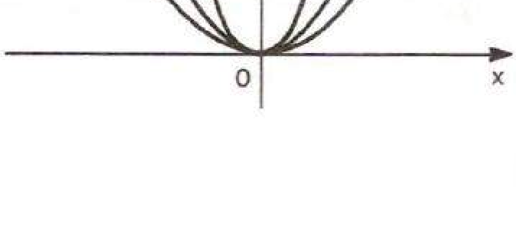
e) $y = x^2 - 3x + \frac{9}{4}$

f) $y = 3x^2 - 4x + 2$

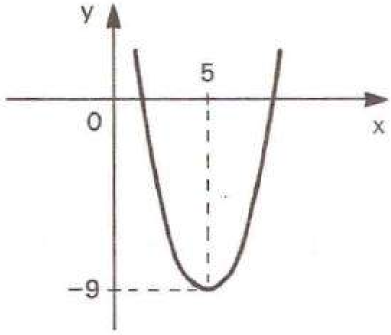
g) $y = -x^2 + x - 1$

h) $y = -\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$

282. No gráfico ao lado estão representadas três parábolas, *1*, *2*, *3*, de equações, respectivamente, $y = ax^2$, $y = bx^2$ e $y = cx^2$. Qual é a relação entre *a*, *b* e *c*?



283. O gráfico do trinômio do 2º grau $ax^2 - 10x + c$ é o da figura:



Determine a e c.

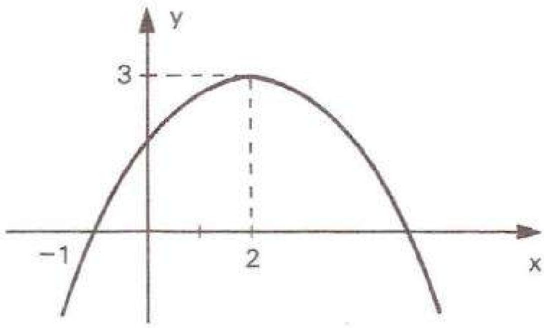
Solução

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{10}{2a} = 5 \implies a = 1$$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-100 + 4ac}{4a} = \frac{-100 + 4c}{4} = -9 \implies c = 16$$

Resposta: $a = 1$ e $c = 16$.

284. A figura abaixo é o gráfico de um trinômio do segundo grau.



Determine o trinômio.

Solução

$$x_v = \frac{-b}{2a} = 2 \implies -b = 4a \implies b^2 = 16a^2 \quad \text{(I)}$$

$$y_v = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = 3 \implies -(16a^2 - 4ac) = 12a$$

$$16a - 4c = -12 \implies 4a - c = -3 \quad \text{(II)}$$

Como $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} = 4$ (já utilizado em (I))

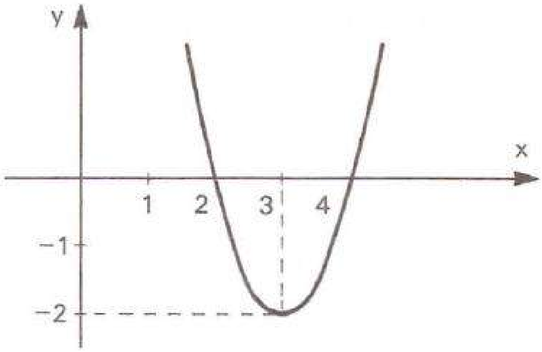
Temos, ainda: $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} = -5 \implies c = -5a$ (III)

Substituindo (III) em (II), vem: $4a + 5a = -3 \implies a = -\dfrac{1}{3}$.

Portanto: $b = \dfrac{4}{3}$ e $c = \dfrac{5}{3}$.

Então, o trinômio é: $y = \dfrac{-1}{3}x^2 + \dfrac{4}{3}x + \dfrac{5}{3}$.

285. Seja f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, cujo gráfico é dado abaixo, sendo a, b, $c \in \mathbb{R}$. Determine o valor de a.

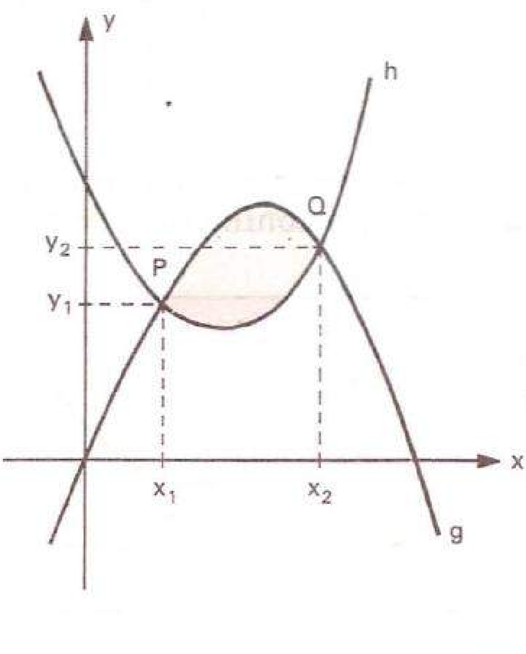


286. Determine a função $g(x)$ cujo gráfico é o simétrico do gráfico da função $f(x) = 2x - x^2$ em relação à reta $y = 3$. Esboce o gráfico.

287. Os gráficos de duas funções quadráticas g e h interceptam-se nos pontos $P(x_1; y_1)$ e $Q(x_2; y_2)$, com $x_2 > x_1$, como mostra a figura.

Se $g(x) = ax^2 + bx + c$ e $h(x) = dx^2 + ex + f$, a área da região sombreada, na figura, é dada por $F(x_2) - F(x_1)$, em que $F(x) = \dfrac{d-a}{3} \cdot x^3 + \dfrac{e-b}{2} \cdot x^2 + (f-c)x$.

Nessas condições, quanto vale a área da região sombreada, no caso em que $g(x) = x^2 + x$ e $h(x) = -x^2 - x + 4$?



XI. Sinal da função quadrática

121. Consideremos a função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0)$$

e vamos resolver o problema: "para que valores de $x \in \mathbb{R}$ temos:

a) $f(x) > 0$; b) $f(x) < 0$; c) $f(x) = 0$?"

Resolver esse problema significa estudar o sinal da função quadrática para cada $x \in \mathbb{R}$.

Na determinação do sinal da função quadrática, devemos começar pelo cálculo do discriminante Δ, quando três casos distintos podem aparecer:

a) $\Delta < 0$ b) $\Delta = 0$ c) $\Delta > 0$

Vejamos como prosseguir em cada caso.

1º caso: $\Delta < 0$

Se $\Delta < 0$, então $-\Delta > 0$.

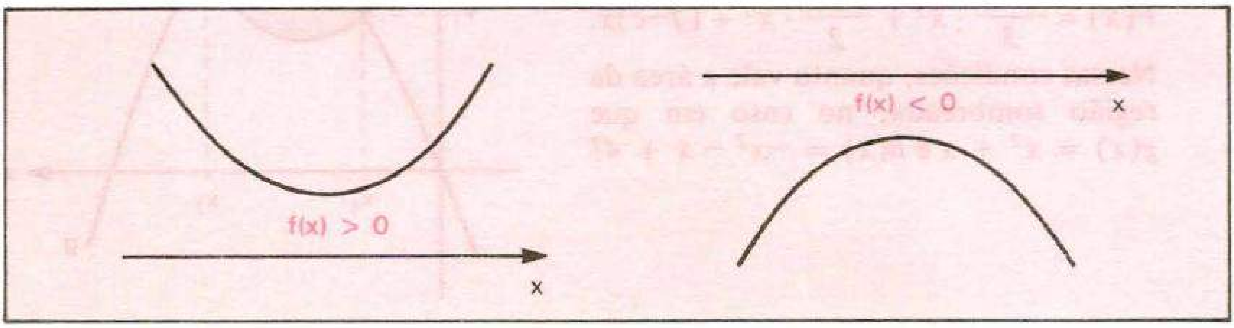
Da forma canônica, temos:

$$a \cdot f(x) = \underbrace{a^2}_{\text{positivo}} \left[\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{\text{(não negativo)}} + \underbrace{\left(\frac{-\Delta}{4a^2}\right)}_{\text{positivo}} \right] \implies a \cdot f(x) > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Isso significa que a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, quando $\Delta < 0$, tem o sinal de a para todo $x \in \mathbb{R}$, ou melhor:

$$\boxed{\begin{array}{l} a > 0 \implies f(x) > 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \\ a < 0 \implies f(x) < 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \end{array}}$$

A representação gráfica da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, quando $\Delta < 0$, vem confirmar a dedução algébrica.



Exemplos

1º) $f(x) = x^2 - 2x + 2$ apresenta $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4 < 0$ e, como $a = 1 > 0$, concluímos que:

$$f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

2º) $f(x) = -x^2 + x - 1$ apresenta $\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = -3 < 0$ e, como $a = -1 < 0$, concluímos que:

$$f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

2º caso: $\Delta = 0$

Da forma canônica, temos:

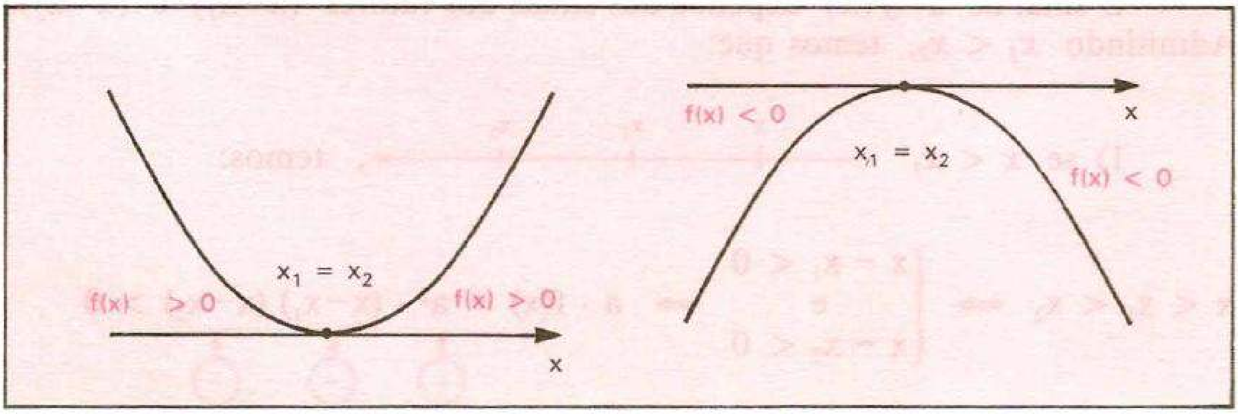
$$a \cdot f(x) = \underset{\text{positivo}}{a^2} \left[\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{\text{(não negativo)}} - \underbrace{\left(\frac{0}{4a^2}\right)}_{\text{zero}} \right] = a^2 \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

então $a \cdot f(x) \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Isso significa que a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, quando $\Delta = 0$, tem o sinal de a para todo $x \in \mathbb{R} - \{x_1\}$, sendo $x_1 = \dfrac{-b}{2a}$ zero duplo de $f(x)$, ou melhor:

$$\boxed{\begin{aligned} a > 0 &\implies f(x) \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ a < 0 &\implies f(x) \leqslant 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}}$$

A representação gráfica da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, quando $\Delta = 0$, vem confirmar a dedução algébrica.



Exemplos

1º) $f(x) = x^2 - 2x + 1$ apresenta $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$; então $f(x)$ tem um zero duplo $x_1 = \frac{-b}{2a} = 1$ e, como $a = 1 > 0$, concluímos:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \ \forall x \in \mathbb{R} - \{1\} \\ f(x) = 0 \text{ se } x = 1 \end{cases}$$

2º) $f(x) = -2x^2 + 8x - 8$ apresenta $\Delta = 8^2 - 4(-2) \cdot (-8) = 0$, então $f(x)$ tem um zero duplo para $x_1 = \frac{-b}{2a} = 2$ e, como $a = -2 < 0$, concluímos:

$$\begin{cases} f(x) < 0, \ \forall x \in \mathbb{R} - \{2\} \\ f(x) = 0 \text{ se } x = 2 \end{cases}$$

3º caso: $\Delta > 0$

Da forma canônica, temos:

$$a \cdot f(x) = a^2 \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] = a^2 \left[\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]$$

Lembramos que a fórmula que dá as raízes de uma equação do segundo grau é:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{isto é} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

fica evidente que a forma canônica se transforma em:

$$af(x) = a^2 \left[\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right] = a^2(x - x_1)(x - x_2).$$

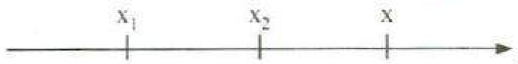
O sinal de $a \cdot f(x)$ depende dos sinais dos fatores $(x-x_1)$ e $(x-x_2)$. Admitindo $x_1 < x_2$, temos que:

1) se $x < x_1$ $\quad \overset{x}{+}\!\!-\!\!\overset{x_1}{+}\!\!-\!\!\overset{x_2}{+}\!\!\longrightarrow$, temos:

$$x < x_1 < x_2 \implies \begin{cases} x - x_1 < 0 \\ \text{e} \\ x - x_2 < 0 \end{cases} \implies a \cdot f(x) = \underset{+}{a^2} \cdot \underset{-}{(x-x_1)}\,\underset{-}{(x-x_2)} > 0$$

2) se $x_1 < x < x_2$ , temos:

$$x_1 < x < x_2 \Longrightarrow \begin{cases} x - x_1 > 0 \\ \quad e \\ x - x_2 < 0 \end{cases} \Longrightarrow a \cdot f(x) = \underbrace{a^2}_{+} \cdot \underbrace{(x-x_1)}_{+}\, \underbrace{(x-x_2)}_{-} < 0$$

3) se $x > x_2$ , temos:

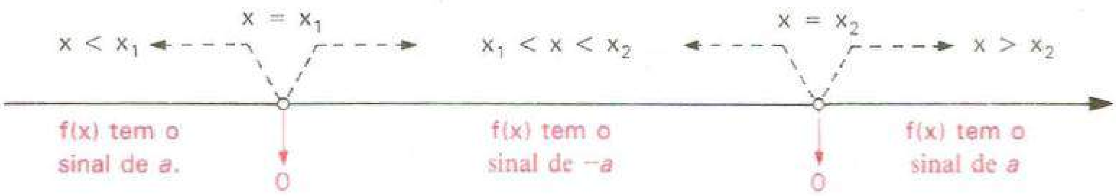
$$x > x_2 > x_1 \Longrightarrow \begin{cases} x - x_1 > 0 \\ \quad e \\ x - x_2 > 0 \end{cases} \Longrightarrow a \cdot f(x) = \underbrace{a^2}_{+} \cdot \underbrace{(x-x_1)}_{+}\, \underbrace{(x-x_2)}_{+} > 0$$

Isso significa que:

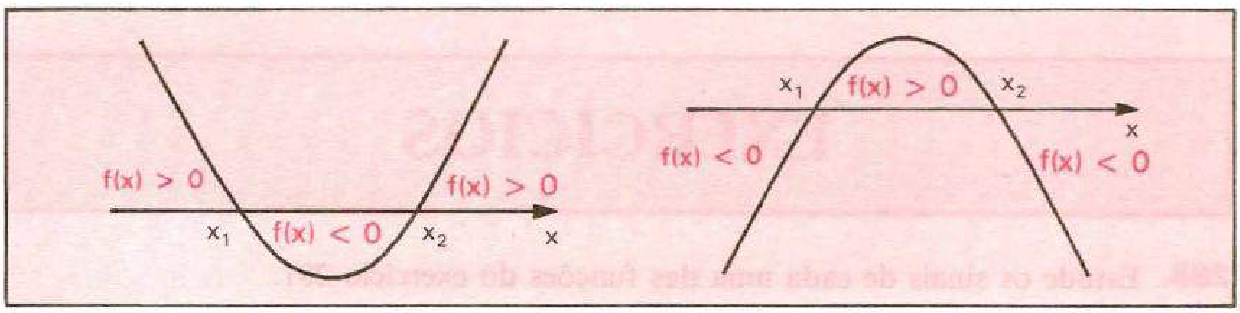
1) O sinal de $f(x)$ é o sinal de a para todo x, tal que $x < x_1$ ou $x > x_2$;

2) O sinal de $f(x)$ é o sinal de $-a$ para todo x, tal que $x_1 < x < x_2$.

Em resumo:



O gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, quando $\Delta > 0$, vem confirmar a dedução algébrica.



Exemplos

1º) $f(x) = x^2 - x - 6$ apresenta $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25 > 0$; então $f(x)$ tem dois zeros reais e distintos:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-5}{2} = -2 \quad e \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+5}{2} = 3$$

e, como $a = 1 > 0$, concluímos que:

$$\begin{cases} f(x) > 0 & \text{para} \quad x < -2 \quad \text{ou} \quad x > 3 \\ f(x) = 0 & \text{para} \quad x = -2 \quad \text{ou} \quad x = 3 \\ f(x) < 0 & \text{para} \quad -2 < x < 3. \end{cases}$$

2º) $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$ apresenta $\Delta = 3^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 2 = 25$; logo $f(x)$ tem dois zeros reais e distintos:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + 5}{-4} = -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - 5}{-4} = 2$$

e, como $a = -2 < 0$, concluímos que:

$$\begin{cases} f(x) < 0 & \text{para} \quad x < -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x > 2 \\ f(x) = 0 & \text{para} \quad x = -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x = 2 \\ f(x) > 0 & \text{para} \quad -\frac{1}{2} < x < 2 \end{cases}$$

EXERCÍCIOS

288. Estude os sinais de cada uma das funções do exercício 281.

289. Quais as condições de x para que a expressão $ax^2 + bx + c$, em que $b^2 - 4ac > 0$ e $a < 0$, seja estritamente positiva?

290. Qual é a condição necessária e suficiente para que o trinômio do 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$ tenha sinal constante em $\mathbb{R}$?

XII. Inequação do 2º grau

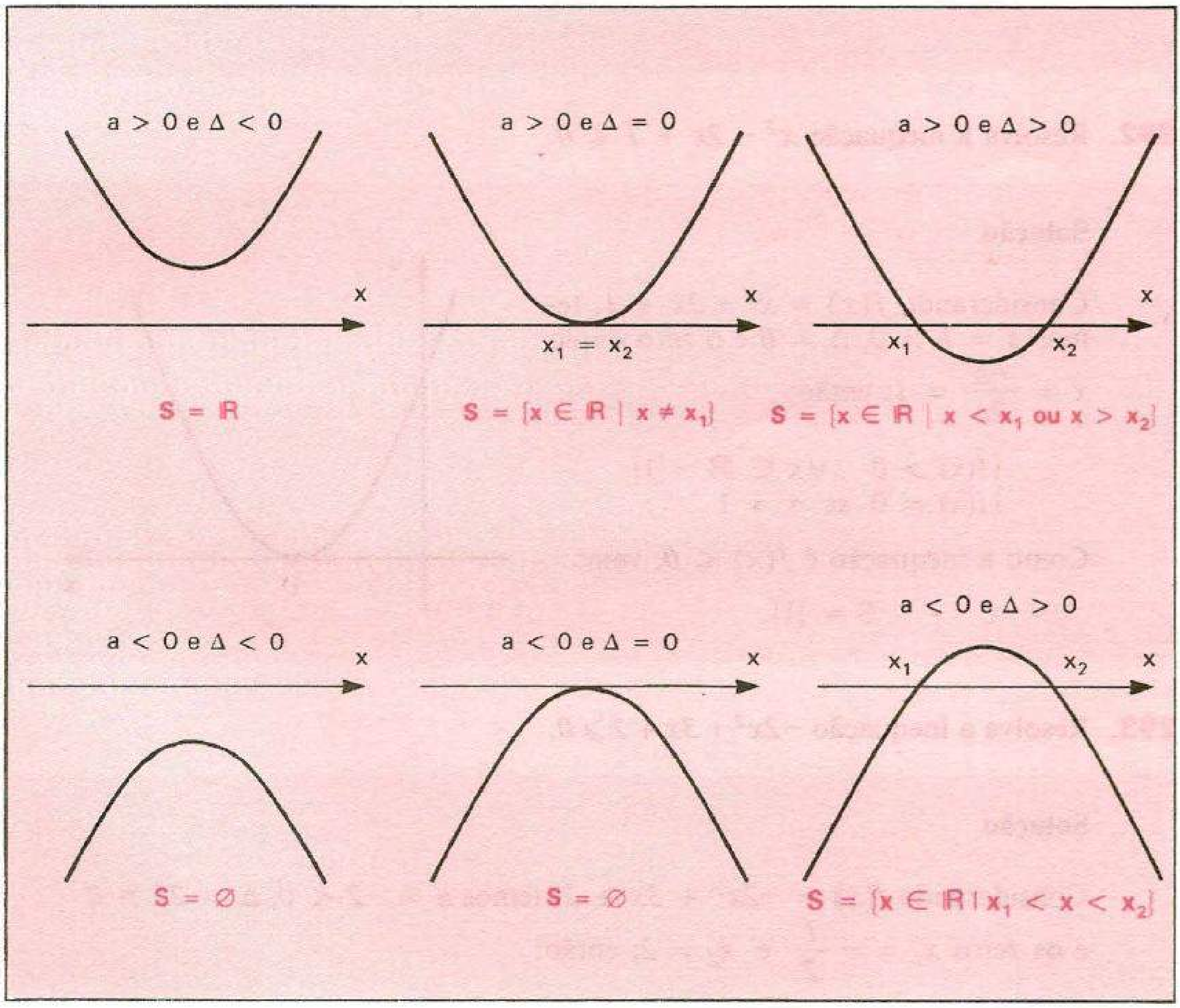
122. Se $a \neq 0$, as inequações $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geqslant 0$ e $ax^2 + bx + c \leqslant 0$ são denominadas *inequações do 2º grau*.

Resolver, por exemplo, a inequação

$$ax^2 + bx + c > 0$$

é responder à pergunta: "existe x real tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$ seja positiva?"

A resposta a essa pergunta se encontra no estudo do sinal de $f(x)$, que pode, inclusive, ser feito através do gráfico da função. Assim, no nosso exemplo, dependendo de a e de Δ, podemos ter uma das seis respostas seguintes:

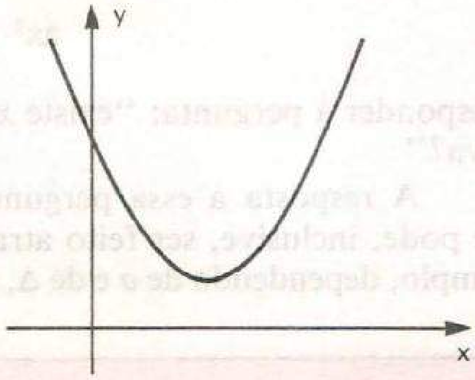


EXERCÍCIOS

291. Resolva a inequação $x^2 - 2x + 2 > 0$.

Solução

Considerando $f(x) = x^2 - 2x + 2$, temos $a = 1 > 0$ e $\Delta = -4 < 0$; então, $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.



Como a inequação é $f(x) > 0$, vem:

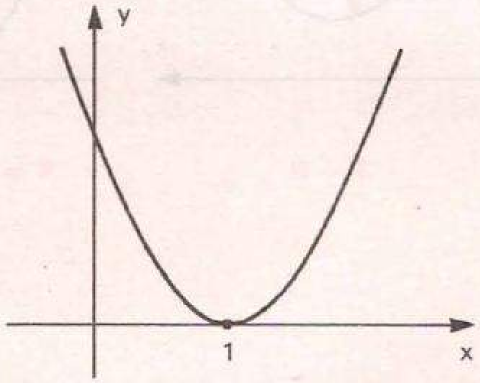
$$S = \mathbb{R}.$$

292. Resolva a inequação $x^2 - 2x + 1 \leqslant 0$.

Solução

Considerando $f(x) = x^2 - 2x + 1$, temos $a = 1 > 0$, $\Delta = 0$ e o zero duplo $x = \dfrac{-b}{2a} = 1$; então:

$$\begin{cases} f(x) > 0 & \forall x \in \mathbb{R} - \{1\} \\ f(x) = 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$



Como a inequação é $f(x) \leqslant 0$, vem:

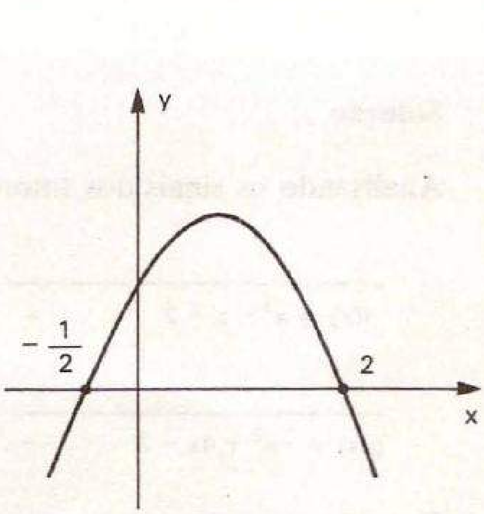
$$S = \{1\}.$$

293. Resolva a inequação $-2x^2 + 3x + 2 \geqslant 0$.

Solução

Considerando $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$, temos $a = -2 < 0$, $\Delta = 25 > 0$ e os zeros $x_1 = -\dfrac{1}{2}$ e $x_2 = 2$; então:

$$\begin{cases} f(x) < 0 \text{ para } x < -\frac{1}{2} \text{ ou } x > 2 \\ f(x) = 0 \text{ para } x = -\frac{1}{2} \text{ ou } x = 2 \\ f(x) > 0 \text{ para } -\frac{1}{2} < x < 2 \end{cases}$$



Como a inequação é $f(x) \geqslant 0$, vem:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2\right\}$.

294. Resolva as inequações em $\mathbb{R}$:

a) $x^2 - 3x + 2 > 0$

b) $-x^2 + x + 6 > 0$

c) $-3x^2 - 8x + 3 \leqslant 0$

d) $-x^2 + \frac{3}{2}x + 10 \geqslant 0$

e) $8x^2 - 14x + 3 \leqslant 0$

f) $4x^2 - 4x + 1 > 0$

g) $x^2 - 6x + 9 \geqslant 0$

h) $-4x^2 + 12x - 9 \geqslant 0$

i) $x^2 + 3x + 7 > 0$

j) $-3x^2 + 3x - 3 < 0$

k) $2x^2 - 4x + 5 < 0$

l) $-\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} > 0$

295. Para que valores de x o trinômio $-x^2 + 3x - 4$ é negativo?

296. Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 \leqslant 0\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 3 > 0\}$, determine $A \cap B$.

297. Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x - 2x^2 \geqslant 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 3\}$ e $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 2 \leqslant 0\}$, determine $(A \cup B) \cap C$.

298. Sejam $p(x) = x^2 - 5x + 6$ e $q(x) = x^2 + 5x + 6$. Se a é um número real e $p(a) < 0$, qual é a condição que deve satisfazer $q(a)$?

299. Qual é uma condição suficiente para que a expressão $Y = +\sqrt{x^2 - 4}$ represente uma função?

300. Resolva a inequação $(x^2 - x - 2)(-x^2 + 4x - 3) > 0$ em $\mathbb{R}$.

Solução

Analisando os sinais dos fatores, temos:

		-1		2		x
$f(x) = x^2 - x - 2$	$+$	0	$-$	0	$+$	

		1		3		x
$g(x) = -x^2 + 4x - 3$	$-$	0	$+$	0	$-$	

Fazendo o quadro-produto, vem:

		-1		1		2		3		x
$f(x) = x^2 - x - 2$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x) = -x^2 + 4x - 3$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x) \cdot g(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1 \text{ ou } 2 < x < 3\}$.

301. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $(1 - 4x^2) \cdot (2x^2 + 3x) > 0$
b) $(2x^2 - 7x + 6) \cdot (2x^2 - 7x + 5) \leqslant 0$
c) $(x^2 - x - 6) \cdot (-x^2 + 2x - 1) > 0$
d) $(x^2 + x - 6) \cdot (-x^2 - 2x + 3) \geqslant 0$
e) $x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0$
f) $2x^3 - 6x^2 + x - 3 \leqslant 0$

302. É dada a função $y = (2x^2 - 9x - 5)(x^2 - 2x + 2)$.
Determine:

a) os pontos de interseção do gráfico da função com o eixo das abscissas;
b) o conjunto dos valores de x para os quais $y \leqslant 0$.

303. Dentre os números inteiros que são soluções da inequação
$(x^2 - 21x + 20) \cdot (3 - x) > 0$, qual é o maior?

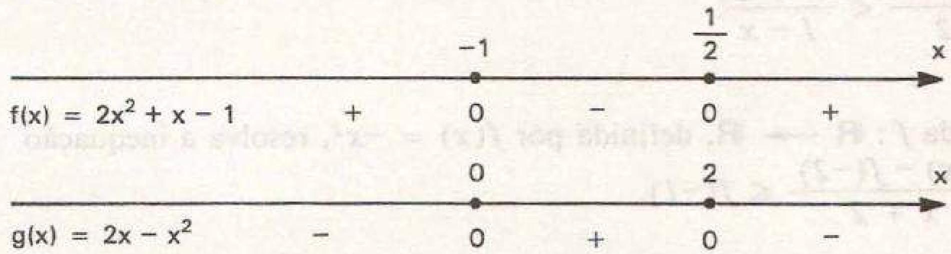
304. Determine os valores de $x \in \mathbb{R}$ que satisfazem a inequação
$(x^2 - 2x + 8)(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 16) < 0$.

305. Seja A o conjunto solução, em $\mathbb{R}$, da inequação $(x^2 - 5x)(x^2 - 8x + 12) < 0$. Determine A.

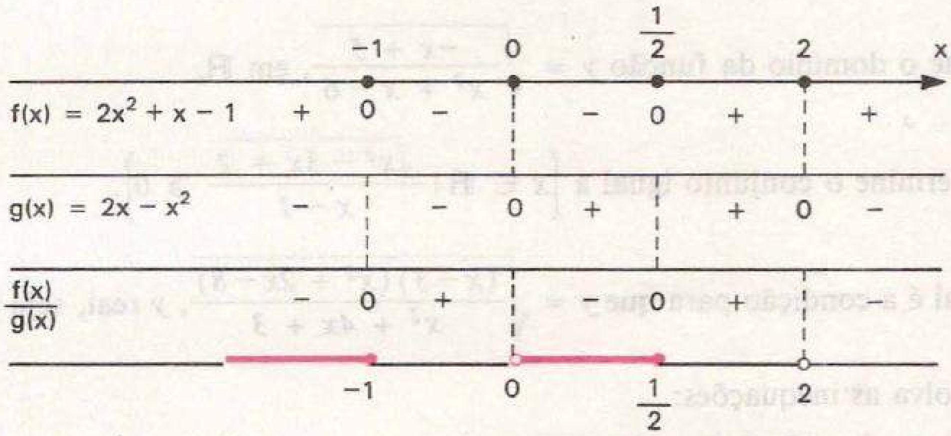
306. Resolva a inequação $\dfrac{2x^2 + x - 1}{2x - x^2} \leqslant 0$ em $\mathbb{R}$.

Solução

Analisando os sinais do numerador e do denominador, temos:



Fazendo o quadro-quociente, vem:



$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } 0 < x \leqslant \frac{1}{2} \text{ ou } x > 2\right\}$$

307. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $\dfrac{4x^2 + x - 5}{2x^2 - 3x - 2} > 0$

b) $\dfrac{-9x^2 + 9x - 2}{3x^2 + 7x + 2} \leqslant 0$

c) $\dfrac{x^2 + 2x}{x^2 + 5x + 6} \geqslant 0$

d) $\dfrac{2 - 3x}{2x^2 + 3x - 2} < 0$

e) $\dfrac{x^2 + 3x - 16}{-x^2 + 7x - 10} \geqslant 1$

f) $\dfrac{2x^2 + 4x + 5}{3x^2 + 7x + 2} < -2$

g) $\dfrac{6x^2 + 12x + 17}{-2x^2 + 7x - 5} \geqslant -1$

h) $\dfrac{(x + 1)^3 - 1}{(x - 1)^3 + 1} > 1$

308. Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução das inequações:

a) $\dfrac{x + 1}{x^2 - 3x + 2} \geqslant 0$

b) $\dfrac{x}{x^3 - x^2 + x - 1} \geqslant 0$

c) $\dfrac{x - 3}{x - 2} \leqslant x - 1$

d) $\dfrac{x}{x + 1} - \dfrac{x}{x - 1} \geqslant 0$

e) $t + \dfrac{1}{t} \leqslant -2$

f) $\dfrac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1} \geqslant \dfrac{1}{x + 1}$

309. Tomando como conjunto universo o conjunto $U = \mathbb{R} - \{1\}$, resolva a inequação $\dfrac{x + 1}{2} < \dfrac{x + 2}{1 - x}$.

310. Dada $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = -x^2$, resolva a inequação $\dfrac{f(x) - f(-2)}{x + 2} \leqslant f(-1)$.

311. a) O que se pretende dizer quando se pede para achar o domínio de uma $f(x)$ igualada a uma expressão em x?

b) Determine, em $\mathbb{R}$, o domínio da função $f(x) = \sqrt{\dfrac{-x^2 + 1}{x^2 - 2x - 15}}$.

312. Ache o domínio da função $y = \sqrt{\dfrac{-x + 5}{x^2 + x - 6}}$, em $\mathbb{R}$.

313. Determine o conjunto igual a $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x - 1} \geqslant 0\right\}$.

314. Qual é a condição para que $y = \sqrt{\dfrac{(x-3)(x^2 + 2x - 8)}{x^2 + 4x + 3}}$, y real, seja definida?

315. Resolva as inequações:

a) $4 < x^2 - 12 \leqslant 4x$

b) $x^2 + 1 < 2x^2 - 3 \leqslant -5x$

c) $0 \leqslant x^2 - 3x + 2 \leqslant 6$

d) $7x + 1 < x^2 + 3x - 4 \leqslant 2x + 2$

e) $0 < x^2 + x + 1 < 1$

f) $4x^2 - 5x + 4 < 3x^2 - 6x + 6 < x^2 + 3x - 4$

316. Resolva os sistemas de inequações:

a) $\begin{cases} x^2 + x - 2 > 0 \\ 3x - x^2 < 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + x - 20 \leqslant 0 \\ x^2 - 4x - 21 > 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 1 + 2x \geqslant 0 \\ -4x^2 + 8x - 3 < 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -2x^2 - x + 1 \geqslant 0 \\ 4x^2 - 8x + 3 \leqslant 0 \end{cases}$

317. Considere as desigualdades:

$4y + 3x \leqslant 12, \quad 0 \leqslant x, \quad 0 \leqslant y.$

Classifique as proposições abaixo em verdadeiras ou falsas:

a) O conjunto de soluções das desigualdades é limitado no plano (x, y).
b) O valor máximo da variável x satisfazendo as desigualdades é 4.
c) O conjunto de soluções das desigualdades não é limitado no plano (x, y).
d) O valor mínimo da variável y satisfazendo as desigualdades é 3.
e) O valor máximo da variável y satisfazendo as desigualdades é 3.

318. Assinale as proposições verdadeiras e as proposições falsas nos itens abaixo.
O conjunto solução do sistema

$\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x^2 - 2x < 0 \end{cases}$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leqslant 0\} \cup \{0 < x < 1\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$
d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leqslant \frac{3}{2}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{2} < x < 2\right\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$

319. Resolva a inequação $x^4 - 5x^2 + 4 \geqslant 0$, em $\mathbb{R}$.

Solução

Fazendo $z = x^2$, temos

$$z^2 - 5z + 4 \geqslant 0 \implies z \leqslant 1 \quad \text{ou} \quad z \geqslant 4$$

mas $z = x^2$; portanto:

$(x^2 \leqslant 1 \quad \text{ou} \quad x^2 \geqslant 4) \implies (x^2 - 1 \leqslant 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - 4 \geqslant 0) \implies$

$\implies (-1 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{ou} \quad x \leqslant -2 \quad \text{ou} \quad x \geqslant 2)$

logo $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \quad \text{ou} \quad -1 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{ou} \quad x \geqslant 2\}$.

320. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $x^4 - 10x^2 + 9 \leqslant 0$
b) $x^4 - 3x^2 - 4 > 0$
c) $x^4 + 8x^2 - 9 < 0$
d) $2x^4 - 3x^2 + 4 < 0$
e) $x^6 - 7x^3 - 8 \geqslant 0$
f) $3x^4 - 5x^2 + 4 > 0$

321. Determine m de modo que a função quadrática
$f(x) = mx^2 + (2m - 1)x + (m + 1)$ seja positiva para todo x real.

Solução

Devemos ter simultaneamente $\Delta < 0$ e $a > 0$; portanto:

1º) $\Delta = b^2 - 4ac = (2m-1)^2 - 4 \cdot m \cdot (m+1) =$
$= 4m^2 - 4m + 1 - 4m^2 - 4m = -8m + 1 < 0 \implies m > \frac{1}{8}$

2º) $a = m > 0 \implies m > 0$

Como as condições são simultâneas, concluímos que:

$$(f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}) \iff m > \frac{1}{8}.$$

322. Determine m para que se tenha para $\forall x \in \mathbb{R}$:

a) $x^2 + (2m-1)x + (m^2-2) > 0$
b) $x^2 + (2m+3)x + (m^2+3) \geqslant 0$
c) $x^2 - mx + m > 0$
d) $x^2 + (m+1)x + m > 0$
e) $-x^2 + (m+2)x - (m+3) \geqslant 0$
f) $(m-1)x^2 + 4(m-1)x + m > 0$
g) $mx^2 + (m-2)x + m \leqslant 0$
h) $mx^2 + (m+3)x + m \geqslant 0$
i) $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3(m-1) < 0$
j) $(m^2-1)x^2 + 2(m-1)x + 1 > 0$

323. Determine m para que se tenha $\dfrac{x^2 + (m+1)x + 1}{x^2 + x + 1} < 2$ para $\forall x \in \mathbb{R}$.

Solução

Considerando que $x^2 + x + 1$ é positivo para qualquer x real, multiplicamos ambos os membros de $\dfrac{x^2 + (m+1)x + 1}{x^2 + x + 1} < 2$ por $(x^2 + x + 1)$, mantendo a desigualdade.

Então:

$$\frac{x^2 + (m+1)x + 1}{x^2 + x + 1} < 2, \forall x \in \mathbb{R} \iff$$
$$\iff x^2 + (m+1)x + 1 < 2(x^2 + x + 1), \forall x \in \mathbb{R} \iff$$
$$\iff -x^2 + (m-1)x - 1 < 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Devemos ter $\Delta < 0$, portanto:

$\Delta = (m-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = m^2 - 2m - 3 < 0 \iff -1 < m < 3.$

Resposta: $-1 < m < 3$.

324. Determine m para que se tenha para $\forall\, x \in \mathbb{R}$:

a) $\dfrac{x^2 + mx + 1}{x^2 + 1} < 2$

b) $\dfrac{x^2 - mx + 2}{x^2 - x + 2} > m$

c) $\dfrac{x}{x^2 + 4} > \dfrac{x + m}{x^2 + 1}$

d) $-3 < \dfrac{x^2 + mx - 2}{x^2 - x + 1} < 2$

325. Qual é o conjunto de valores de p para os quais a inequação $x^2 + 2x + p > 10$ é verdadeira para qualquer x pertencente a $\mathbb{R}$?

326. Qual é a condição para que a desigualdade $x^2 - 2(m + 2)x + m + 2 > 0$ seja verificada para todo número real x?

327. Se $\dfrac{x - a}{x^2 + 1} < \dfrac{x + a}{x^2}$, para todo $x \neq 0$, qual é a condição que a satisfaz?

328. Determine os valores de $m \in \mathbb{R}$ para os quais o domínio da função $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x^2 - mx + m}}$ é o conjunto dos reais.

329. Para que a função real $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + k}$, em que x e k são reais, seja definida para qualquer valor de x, qual deve ser o valor de k?

XIII. Comparação de um número real com as raízes da equação do 2º grau

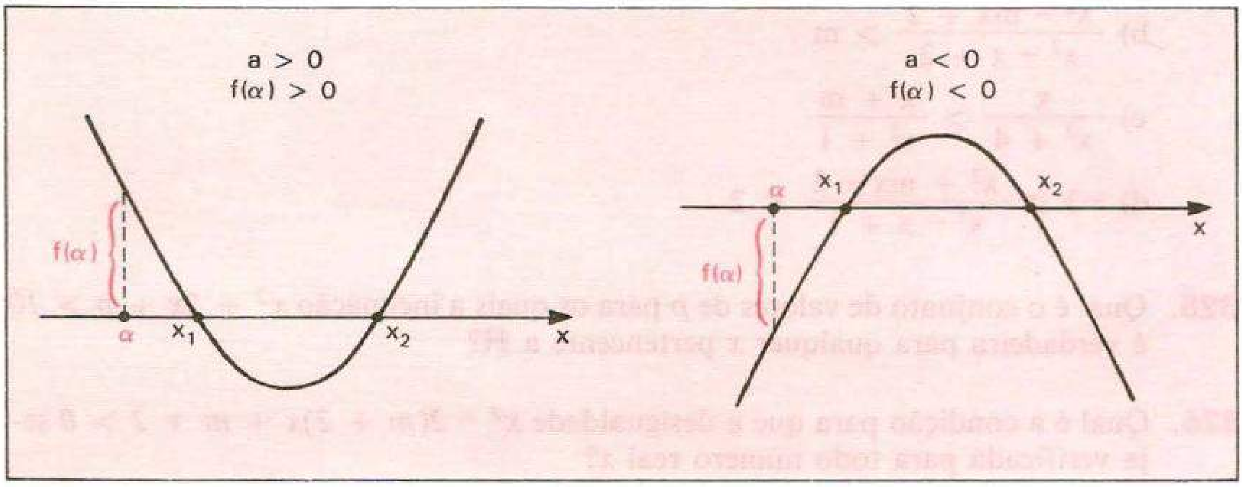
123. Comparar o número real α às raízes reais $x_1 \leqslant x_2$ da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ é verificar se:

1) α está à esquerda de x_1 ($\alpha < x_1 \leqslant x_2$)
2) α está entre as raízes ($x_1 < \alpha < x_2$)
3) α está à direita de x_2 ($x_1 \leqslant x_2 < \alpha$)
4) α é uma das raízes ($\alpha = x_1$ ou $\alpha = x_2$)

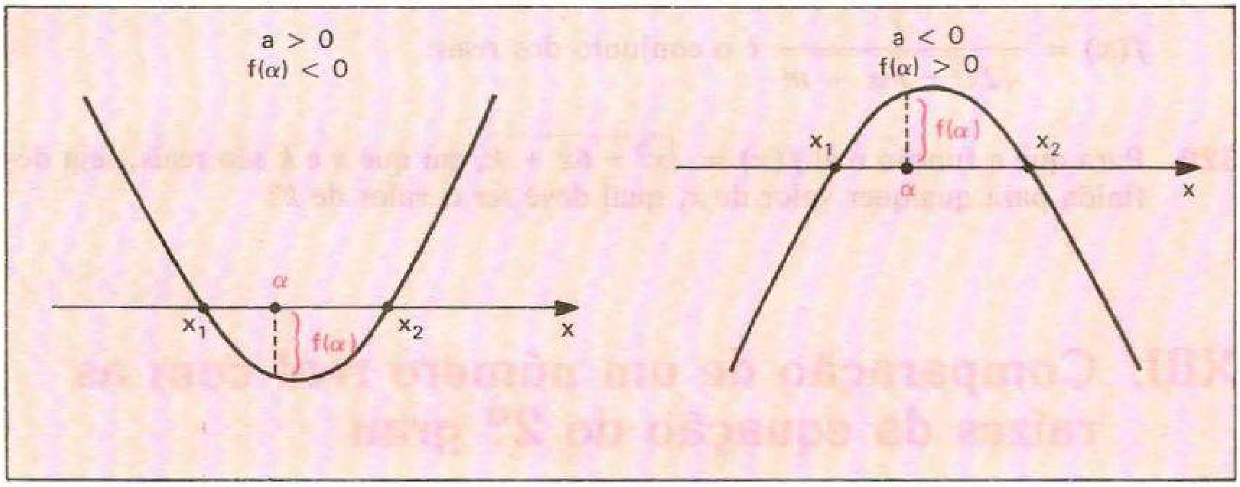
sem calcular as raízes.

Sendo $f(x) = ax^2 + bx + c$ uma função quadrática, cuja regra de sinal já discutimos neste capítulo, temos que:

a) se α estiver à esquerda de x_1 ou à direita de x_2, o produto $a \cdot f(\alpha)$ é positivo, isto é: a (coeficiente de x^2) e $f(\alpha) = a\alpha^2 + b\alpha + c$ têm o mesmo sinal.



b) se α estiver entre as raízes x_1 e x_2 ($x_1 \neq x_2$), o produto $a \cdot f(\alpha)$ é negativo, isto é: a e $f(\alpha)$ têm sinais contrários.



c) se α é zero de $f(x)$, então $a \cdot f(\alpha) = 0$, pois $f(\alpha) = 0$.

Resumo

Conhecendo a posição de α em relação às raízes reais x_1 e x_2 de $f(x) = 0$, temos que:

1) $\alpha < x_1 \leqslant x_2 \implies a \cdot f(\alpha) > 0$
2) $x_1 < \alpha < x_2 \implies a \cdot f(\alpha) < 0$
3) $x_1 \leqslant x_2 < \alpha \implies a \cdot f(\alpha) > 0$
4) $\alpha = x_1$ ou $\alpha = x_2 \implies a \cdot f(\alpha) = 0$

Observemos que nos casos 1, 3 e 4 o discriminante é $\Delta \geqslant 0$ enquanto no caso 2 temos $\Delta > 0$.

Inversamente, conhecendo o sinal do produto $a \cdot f(\alpha)$, que conclusão podemos tirar da *existência de raízes reais* da equação $f(x) = 0$ e qual a *posição de* α em relação às mesmas raízes?

É o que veremos em seguida.

124. Teorema 1

Se $a \cdot f(\alpha) < 0$, o trinômio $f(x) = ax^2 + bx + c$ tem zeros reais e distintos e α está compreendido entre eles.

$H\{a \cdot f(\alpha) < 0 \qquad\qquad T\{\Delta > 0 \text{ e } x_1 < \alpha < x_2$

Demonstração

1º) Se fosse $\Delta \leqslant 0$, teríamos: $a \cdot f(\alpha) \geqslant 0$, $\forall\, \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, o que é absurdo, pois contraria a hipótese $a \cdot f(\alpha) < 0$.

Concluímos, então, que $\Delta > 0$, isto é, $f(x)$ tem dois zeros x_1 e x_2, reais e distintos.

2º) Se o real α estiver à esquerda de x_1 ou à direita de x_2 ou for um zero de $f(x)$, teremos $a \cdot f(\alpha) \geqslant 0$, o que contraria a hipótese $a \cdot f(\alpha) < 0$.

Concluímos, então, que α está compreendido entre x_1 e x_2.

Exemplo

Comparar o número 1 às raízes da equação $3x^2 - 5x + 1 = 0$.

Temos $a = 3$, $\alpha = 1$ e $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$; então:

$$a \cdot f(\alpha) = 3 \cdot f(1) = 3 \cdot (3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 1) = -3 < 0.$$

Conclusão: $\Delta > 0$ e $x_1 < 1 < x_2$.

125. Teorema 2

Se $a \cdot f(\alpha) > 0$ e $\Delta \geqslant 0$, então α está à esquerda de x_1 ou à direita de x_2.

$$H \begin{cases} a \cdot f(\alpha) > 0 \\ \text{e} \\ \Delta \geqslant 0 \end{cases} \qquad\qquad T \begin{cases} \alpha < x_1 \leqslant x_2 \\ \text{ou} \\ x_1 \leqslant x_2 < \alpha \end{cases}$$

Demonstração

Se $\Delta > 0$ e $x_1 \leqslant \alpha \leqslant x_2$, então $a \cdot f(\alpha) \leqslant 0$, o que contradiz a hipótese $a \cdot f(\alpha) > 0$.

Se $\Delta = 0$ e $\alpha = x_1 = x_2$, então $a \cdot f(\alpha) = 0$, o que também contradiz a hipótese $a \cdot f(\alpha) > 0$.

Concluímos que $\alpha < x_1 \leqslant x_2$ ou $x_1 \leqslant x_2 < \alpha$.

Observação

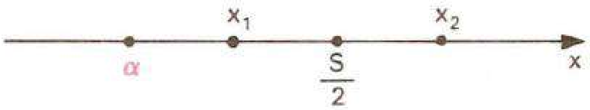
Notemos que, se $a \cdot f(\alpha) > 0$ e $\Delta \geqslant 0$, o teorema 2 garante que $\alpha \notin [x_1, x_2]$, mas não indica se α está à esquerda desse intervalo $(\alpha < x_1 \leqslant x_2)$ ou à direita dele $(x_1 \leqslant x_2 < \alpha)$. Para verificarmos qual dessas duas situações está ocorrendo, devemos comparar α com um número qualquer que esteja entre as raízes. Para facilitar os cálculos vamos utilizar o número $\frac{S}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-b}{2a}$, que é a média aritmética das raízes x_1 e x_2, pois:

$$x_1 \leqslant x_2 \Longrightarrow x_1 \leqslant \frac{x_1 + x_2}{2} \leqslant x_2 \Longrightarrow x_1 \leqslant \frac{S}{2} \leqslant x_2.$$

Calculando $\frac{S}{2} = \frac{-b}{2a}$, temos duas possibilidades a examinar:

1ª) se $\alpha < \frac{S}{2}$, então α está à esquerda de $\frac{S}{2}$ e, conseqüentemente, à esquerda de x_1:

$$\alpha < \frac{S}{2} \Longrightarrow \alpha < x_1 \leqslant x_2$$



2ª) se $\alpha > \frac{S}{2}$, então α está à direita de $\frac{S}{2}$ e, conseqüentemente, à direita de x_2:

$$\alpha > \frac{S}{2} \Longrightarrow x_1 \leqslant x_2 < \alpha$$

Exemplos

1º) Comparar o número *1* às raízes da equação $3x^2 + 4x - 3 = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \Delta = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-3) = 52 > 0 \\ a \cdot f(\alpha) = 3 \cdot f(1) = 3 \cdot (3 + 4 - 3) = 12 > 0 \\ \frac{S}{2} = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{3} < 1 = \alpha \end{array}\right\} \Longrightarrow x_1 < x_2 < 1$$

2º) Comparar o número *0* às raízes da equação $4x^2 - 6x + 1 = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 20 > 0 \\ a \cdot f(\alpha) = 4 \cdot f(0) = 4 \cdot 1 = 4 > 0 \\ \dfrac{S}{2} = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{3}{4} > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow 0 < x_1 < x_2$$

126. Resumo

Se $f(x) = ax^2 + bx + c$ apresenta zeros reais $x_1 \leqslant x_2$ e α é um número real que vai ser comparado a x_1 e x_2, temos:

a) $a \cdot f(\alpha) < 0 \xRightarrow{T-1} x_1 < \alpha < x_2$

b) $a \cdot f(\alpha) = 0 \Longrightarrow \alpha$ é uma das raízes

c) $a \cdot f(\alpha) > 0$ e $\Delta \geqslant 0 \Longrightarrow \begin{cases} \alpha < x_1 \leqslant x_2 \text{ se } \alpha < \dfrac{S}{2} \\ x_1 \leqslant x_2 < \alpha \text{ se } \alpha > \dfrac{S}{2} \end{cases}$

EXERCÍCIOS

330. Determine *m* de modo que o número *1* esteja compreendido entre as raízes da equação: $mx^2 + (m - 1)x - m = 0$.

Solução

Consideremos $f(x) = mx^2 + (m - 1)x - m$.
Para que aconteça $x_1 < 1 < x_2$, em que x_1 e x_2 são as raízes de $mx^2 + (m - 1)x - m = 0$, devemos ter:

$$af(1) < 0 \Longrightarrow \underbrace{m}_{a}\,\underbrace{[m \cdot 1^2 + (m - 1) \cdot 1 - m]}_{f(1)} < 0$$

$$\Longrightarrow m \cdot (m - 1) < 0 \Longrightarrow 0 < m < 1$$

Resposta: $0 < m < 1$.

331. Determine m de modo que o número α esteja compreendido entre as raízes da equação:

a) $mx^2 + (2m - 3)x + m - 1 = 0$ e $\alpha = 2$
b) $(m - 1)x^2 + (2m + 1)x + m = 0$ e $\alpha = -1$
c) $mx^2 + (m - 1)x + (m + 2) = 0$ e $\alpha = 0$
d) $(m^2 - 1)x^2 + (m - 3)x + m + 1 = 0$ e $\alpha = 1$

332. Determine os valores de m na equação $x^2 + (m - 2)x + 1 - m = 0$ de modo que o número real 2 esteja compreendido entre as raízes.

333. Determine m para que a equação: $(m - 2)x^2 - 3mx + (m + 2) = 0$ tenha uma raiz positiva e outra negativa.

334. Determine o menor valor inteiro de k para que a equação $2x^2 + kx + k - 5 = 0$ tenha duas raízes de sinais contrários, sendo a negativa a de maior valor absoluto.

335. Determine m de modo que a equação $mx^2 - (2m + 1)x + 2 + m = 0$ tenha raízes reais tais que $-1 < x_1 < x_2$.

Solução

Consideremos $f(x) = mx^2 - (2m + 1)x + 2 + m$.

Para que aconteça $-1 < x_1 < x_2$, em que x_1 e x_2 são as raízes reais de $mx^2 - (2m + 1)x + 2 + m = 0$, devemos ter:

$$a \cdot f(-1) > 0, \quad \Delta > 0 \quad \text{e} \quad \frac{S}{2} > -1.$$

Analisando separadamente cada condição:

1ª) $a \cdot f(-1) > 0 \implies \underbrace{m}_{a} \cdot [\underbrace{m(-1)^2 - (2m + 1) \cdot (-1) + 2 + m}_{f(-1)}] > 0 \implies$

$$\implies m \cdot (4m + 3) > 0 \implies m < -\frac{3}{4} \text{ ou } m > 0.$$

2ª) $\Delta \geqslant 0 \implies (2m + 1)^2 - 4 \cdot m(2 + m) \geqslant 0 \implies -4m + 1 > 0 \implies m \leqslant \frac{1}{4}.$

3ª) $\frac{S}{2} > -1 \implies \frac{2m + 1}{2m} > -1 \implies \frac{2m + 1}{2m} + 1 > 0 \implies \frac{4m + 1}{2m} > 0 \implies$

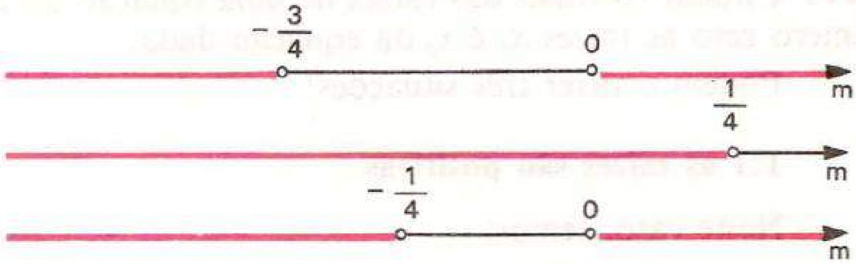
$$\implies m < -\frac{1}{4} \text{ ou } m > 0.$$

Representando os valores encontrados sobre um eixo:

$(a \cdot f(-1) > 0)$

$(\Delta \geqslant 0)$

$\left(\dfrac{S}{2} > -1\right)$



Como as três condições são simultâneas, fazendo a interseção dos intervalos acima vamos encontrar:

$$m < -\frac{3}{4} \quad \text{ou} \quad 0 < m \leqslant \frac{1}{4}, \text{ que é a resposta.}$$

336. Determine m de modo que a equação $(m-3)x^2 + 2(m-2)x + m + 1 = 0$ tenha raízes reais tais que $x_1 < x_2 < 1$.

337. Determine m de modo que a equação $(m - 1)x^2 - mx - 2m - 2 = 0$ tenha raízes reais tais que $-1 < x_1 < x_2$.

338. Determine m de modo que a equação do 2º grau $mx^2 - 2(m + 1)x + m + 5 = 0$ tenha raízes reais tais que $0 < x_1 < x_2 < 2$.

339. Determine m para que a equação do 2º grau $mx^2 - 2(m + 1)x + m + 5 = 0$ tenha raízes reais tais que $x_1 < 0 < x_2 < 2$.

340. Determine m para que a equação do 2º grau $3x^2 - 2(m + 2)x + m^2 - 6m + 8 = 0$ tenha raízes reais tais que $x_1 < 1 < x_2 < 4$.

341. Determine m para que a equação do 2º grau $(2m + 1)x^2 + 2x + m + 1 = 0$ tenha raízes reais tais que $0 < x_1 < x_2 < 4$.

342. Determine m na equação do 2º grau $(3m - 2)x^2 + 2mx + 3m = 0$ para que tenha uma única raiz entre -1 e 0.

343. Determine m na equação do 2º grau $mx^2 - 2(m - 1)x - m - 1 = 0$ para que se tenha uma única raiz entre -1 e 2.

XIV. Sinais das raízes da equação do 2º grau

127. Estudar os sinais das raízes de uma equação do 2º grau é comparar o número zero às raízes x_1 e x_2 da equação dada.

Podem ocorrer três situações:

1ª) as raízes são positivas

Neste caso, temos:

$0 < x_1 < x_2$

ou

$0 < x_1 = x_2$

De acordo com a teoria anterior, temos:

$$\Delta \geqslant 0 \quad \text{e} \quad a \cdot f(0) > 0 \quad \text{e} \quad \frac{S}{2} > 0.$$

Notemos que, sendo $f(x) = ax^2 + bx + c$, temos:

a) $a \cdot f(0) = a \cdot c > 0 \implies \frac{c}{a} > 0 \implies P > 0$

em que $P = \frac{c}{a}$ é o produto das raízes da equação do 2º grau.

b) $\frac{S}{2} > 0 \implies S > 0$

em que $S = -\frac{b}{a}$ é a soma das raízes da equação do 2º grau.

Assim sendo, uma equação do 2º grau tem raízes positivas somente se:

$$\Delta \geqslant 0 \quad \text{e} \quad P > 0 \quad \text{e} \quad S > 0$$

isto é, se as raízes forem reais, com produto positivo e soma positiva.

2ª) as raízes são negativas

Neste caso, temos:

$x_1 < x_2 < 0$

ou

$x_1 = x_2 < 0$

De acordo com a teoria anterior, temos:

$$\Delta \geqslant 0 \quad \text{e} \quad a \cdot f(0) > 0 \quad \text{e} \quad \frac{S}{2} < 0.$$

Isso também pode ser escrito assim:

$$\Delta \geqslant 0 \quad \text{e} \quad P > 0 \quad \text{e} \quad S < 0.$$

3ª) as raízes têm sinais contrários

Neste caso, temos:

$$x_1 < 0 < x_2.$$

De acordo com a teoria anterior, temos:

$$a \cdot f(0) < 0 \quad \text{ou} \quad P < 0.$$

128. *Aplicação*

Determinar os valores de *m* na equação do 2º grau

$$(m - 1)x^2 + (2m + 1)x + m = 0$$

para que as raízes reais sejam distintas e positivas.

Como a equação é do 2º grau, devemos ter, inicialmente,

$$m - 1 \neq 0 \implies m \neq 1$$

e, se as raízes são distintas e positivas ($0 < x_1 < x_2$), então:

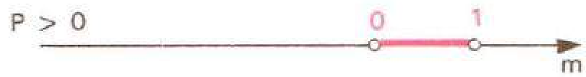
$\Delta > 0$ (pelo fato de as raízes serem reais e distintas) e $S > 0$ e $P > 0$ (pelo fato de as raízes serem positivas).

Analisando cada condição:

$$\Delta = (2m + 1)^2 - 4(m - 1) \cdot m = $$
$$= 8m + 1 > 0 \implies m > -\frac{1}{8}$$

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-(2m + 1)}{m - 1} > 0 \implies$$
$$\implies -\frac{1}{2} < m < 1$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{m}{m - 1} > 0 \implies$$
$$\implies 0 < m < 1$$



Fazendo a interseção das três condições, vem $0 < m < 1$, que é a resposta.

EXERCÍCIOS

344. Determine m de modo que a equação do 2º grau $(m+1)x^2+2(m+1)x+m-1=0$ tenha raízes negativas.

345. Determine m de modo que a equação do 2º grau $(m+1)x^2+2x+m-1=0$ tenha raízes positivas.

346. Determine m de modo que a equação do 2º grau $(m-2)x^2+(3m-1)x+(m+1)=0$ tenha raízes de sinais contrários.

347. Determine m de modo que a equação do 2º grau $(m-1)x^2+(2m+3)x+m=0$ admita raízes negativas.

348. Determine m de modo que a equação do 2º grau $(m^2-4)x^2+mx+m-3=0$ admita raízes de sinais contrários.

349. Determine m de modo que a equação do 2º grau $mx^2-(2m-1)x+(m-2)=0$ admita raízes positivas.

350. Determine o menor valor inteiro de k para que a equação $2x^2+kx+k-5=0$ tenha duas raízes de sinais contrários, sendo a negativa a de maior valor absoluto.

351. Considere o conjunto $A = \{y \in Z \text{ tal que } |y| < 4\}$. Responda:

a) Qual o número de equações do tipo $x^2+2mx+n=0$, com $m \in A$ e $n \in A$?

b) Dentre as equações obtidas no item a, quantas têm raízes reais e distintas?

c) Dentre as equações com raízes reais e distintas, quantas têm raízes positivas?

352. A equação $(m^2+1)x-2m+5=0$ admite raiz negativa para qual condição sobre m?

353. Sejam p e q reais; se a equação do segundo grau em x:

$$x^2+p^2x+q^2+1=0$$

tem duas raízes reais, x_1 e x_2, qual é o sinal dessas raízes?

LEITURA

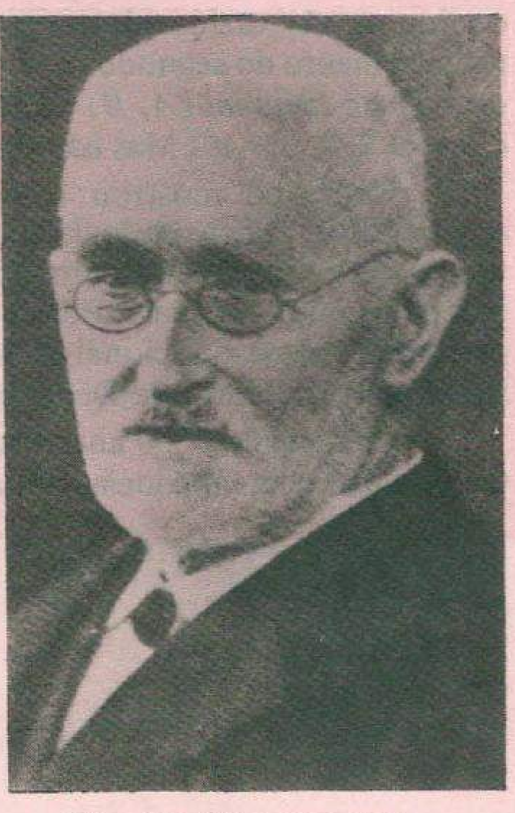
Dedekind e os Números Reais

Hygino H. Domingues

A escola pitagórica provou que $\sqrt{2}$ não é um número racional. Mas nem por isso descobriu os números irracionais. E como os gregos de então, ao contrário de babilônios e egípcios, não eram de se contentar com aproximações, desprovidas de significado teórico, enveredaram pela geometria para superar esse impasse (ver pág. 62). Assim, os gregos do período clássico, ao resolverem a equação $x^2 = 2$, por exemplo, faziam-no geometricamente, fornecendo a raiz positiva como um segmento de reta. E se hoje dizemos "x ao quadrado" para indicar x^2, isso se deve a que os gregos associavam um produto de fatores iguais à figura de um quadrado. Coisa análoga vale para x^3.

Mas a ciência aplicada não pode prescindir da matemática numérica. De modo que já no período alexandrino, quando a matemática grega se abriu para as aplicações, não lhe restou senão imitar a atitude de egípcios e babilônios com relação aos números irracionais — pois ainda demoraria muito até que a natureza destes fosse decifrada.

Assim é que até a primeira metade do século XIX o conceito de número irracional não havia ainda sido elucidado e o conjunto dos números reais carecia de fundamentação lógica. A substituição da intuição geométrica pelos números, como base da análise matemática, foi a grande motivação, no século XIX, para as tentativas de pôr em pratos limpos a questão dos números reais. E entre os matemáticos com papel decisivo nessa empreitada figura Richard Dedekind (1831-1916).



Richard Dedekind (1831-1916).

Dedekind nasceu na Alemanha, em Brunswick, também cidade natal de Gauss. Mas, ao contrário deste, seu extraordinário gênio matemático não aflorou precocemente. Na Universidade de Göttingen, em que ingressou aos 19 anos de idade, Dedekind iria ter a oportunidade de ser aluno de seu conterrâneo. E o mesmo Gauss, em 1852, teve ocasião de dar parecer favorável à tese de doutoramento de Dedekind.

Depois de trabalhar quatro anos em Göttingen como instrutor e seis anos como professor na Escola Politécnica de Zurique, Dedekind foi contratado pela Escola Técnica Superior de sua cidade natal, onde permaneceu até a morte.

São inúmeras as contribuições de Dedekind à Matemática. Mas seu nome provavelmente é mais lembrado por dois importantes conceitos: o de *ideal*, um dos mais fecundos hoje em dia em todos os campos da matemática; e o de *corte*, através do qual caracterizou, num livro de 1872, os números reais.

Como professor de cálculo, já a partir de 1858, sentiu mais diretamente a falta de um embasamento teórico para o sistema dos números reais. Exemplificava dizendo não haver uma demonstração sequer para coisas corriqueiras como $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$. E a questão central era como esclarecer a idéia de *continuidade*.

Depois de meditar muito, não sem buscar inspiração em Eudóxio, Dedekind abraçou a idéia de que se poderia chegar ao conceito de continuidade através de convenientes partições em $\mathbb{Q}$. E definiu um corte em $\mathbb{Q}$ como uma partição deste conjunto num par (A, B) de subconjuntos não vazios tais que todo elemento do primeiro é menor que todo elemento do segundo. Por exemplo, para cada $a \in \mathbb{Q}$ está associado o *corte racional* (A, B) definido por a, em que $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leqslant a\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > a\}$. Mas não vale a recíproca: há cortes não racionais.

Dedekind mostrou como operar com esses cortes e como compará-los. Desse modo cada corte passa a representar formalmente um número real e o conjunto desses cortes pode ser visto como o conjunto dos números reais. Por exemplo, o corte (A, B) do exemplo representa o número racional a; os cortes não racionais são os números irracionais da teoria de Dedekind.

Os mais de 2 000 anos decorridos desde o início até o fim desta história dão bem uma idéia da magnitude do passo dado por Dedekind.