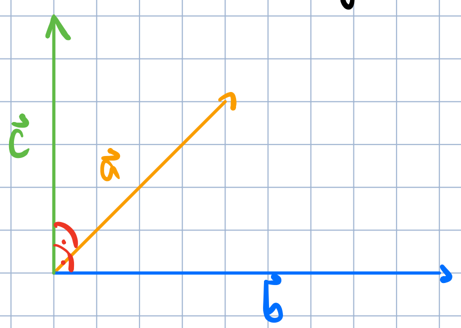
7. Vektorprodukt

Wir suchen einen Vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$, der auf zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht steht. Dazu müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:



$$(\mathrm{I}) \quad a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = \vec{a} \circ \vec{c} = 0$$

und

$$(\mathrm{II}) \quad b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 = \vec{b} \circ \vec{c} = 0$$

Die Lösung des Problems liefert das Vektorprodukt

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} a_1 & & b_1 \\ a_2 & & b_2 \end{matrix}$$

Nachweis:

$$(\mathrm{I}) \quad a_1 \cdot (a_2b_3 - a_3b_2) + a_2 \cdot (a_3b_1 - a_1b_3) + a_3 \cdot (a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$= a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2 - a_2a_3b_1 = 0 \quad ✓$$

$$(\mathrm{II}) \quad b_1 \cdot (a_2b_3 - a_3b_2) + b_2 \cdot (a_3b_1 - a_1b_3) + b_3 \cdot (a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$= a_2b_1b_3 - a_3b_1b_2 + a_3b_1b_2 - a_1b_2b_3 + a_1b_2b_3 - a_2b_1b_3 = 0$$

DEFINITION

Zu den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ c_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ steht der Vektor

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$ senkrecht.

Wir nennen $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ das <u>Vektorprodukt</u> bzw. <u>Kreuzprodukt</u>.

ACHTUNG

Es gilt nicht das Kommutativgesetz: $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \neq \vec{b} \times \vec{a}$

Beispiel: Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ spannen ein Parallelogramm auf. Berechne $\vec{a} \times \vec{b}$ und $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \cdot (-2) - 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot (-1) - (-4) \cdot (-2) \\ -4 \cdot 2 - 4 \cdot (-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -12 \\ -10 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-12)^2 + (-10)^2 + (-4)^2} = \sqrt{260} \approx 16{,}1$$

$$A_p = |\vec{b}| \cdot |\vec{h}|$$

$$= |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \sin(\alpha)$$

$$= 3 \cdot 6 \cdot \sin\left(\arccos\left(\frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)\right)$$

$$= 3 \cdot 6 \cdot \sin\left(\arccos\left(\frac{4}{9}\right)\right)$$

$$\approx 16{,}1$$

Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ spannen ein Parallelogramm mit dem Flächeninhalt

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\alpha)$$

auf.