# 第 4 讲 函数的性质

**【内容分析】**

本节主要总结归纳函数的几个重要的性质：**单调性、奇偶性、周期性**，强调学习重点和查漏补缺。

学习函数的有界性，强调四种性质的抽象数学语言表达。

学会进行动手实验实践，在熟练分析函数性质的基础上，**熟练画出见函数的草图，**并形成能力，在本册后继概念、定理的学习、定积分的应用中这是主要基本功。

**【重难点】**

重点是常见函数的有界性；常见的奇、偶函数，奇偶性的四则运算；复合函数单调性、奇偶性质、周期性的判定。

难点是函数有界性的概念和性质。

**【知识目标】函数的有界性、单调性、奇偶性、周期性**

**【能力目标】**

1.能根据函数图像熟练分析函数的有界性、单调性、奇偶性、周期性

2.学会用数学语言描述函数的有界性、单调性、奇偶性、周期性的定义,并能利用定义证明某一函数的性质.

3.具有利用函数的性质,熟练画出常见初等函数的草图的能力。

**【过程与方法目标】**

1.对难点有界性的学习，首先,结合前面介绍过的常见函数例子，借助 GGB 分析其图像，学习函数的有界性，并归纳整理常见的有界函数。接着,借助 GGB 分析复合函数的有界性。最后，借助 GGB 分析在区间上的有界性.

2. 对函数的单调性、奇偶性、周期性的学习,首先,在复习回顾基础上综合归纳总结。接着,分析总结完函数的相关性。然后,对知识框架查漏补缺，重点强调和本学期相链接的基本功。最后,在把握函数主要性质的基础上，要求学生掌握有界性的$\varepsilon-\delta$语言描述。

3.复习基本初等函数和常见函数做草图的方法，**熟练画出基本初等函数、常见函数的草图，**并形成能力。

**【情感态度和价值观目标】**

1.通过四个性质的“$\varepsilon-\delta$”语言学习具有基本的数学抽象素养，掌握微积分的语言。并尝试利用定义证明函数的过程中培养数学逻辑推理、数学抽象、数学计算素养。

2.在进行函数性质的分析中，通过举出大量的例子，教会学生借助数学工具 GGB 分析函数性质，充分调动学生积极性，激发学生主观想象、运用数学的工具化意识，逐步具备了综合分析的学习能力。

3.在熟练掌握函数的性质基础上，鼓励学生动手实践，进行手动画函数草图，不断增强了学生的综合实践能力。

4.组织启发、讨论、探究、实验等课堂活动养成自主、探究、反思的学习习惯；培养学生交流沟通，团队合作、竞争自信的职业素质和诚实认真的道德品质 。

**【课前小测】**

**1.（2024 数 I TI）下列函数是偶函数的是（ B ）**

**A.tanx**

**B.cosx**

**C.$x^3$**

**D.$3^x$**

**2.（2023 数 II TI）下列函数是奇函数的是（ D ）**

**A. $e^x$**

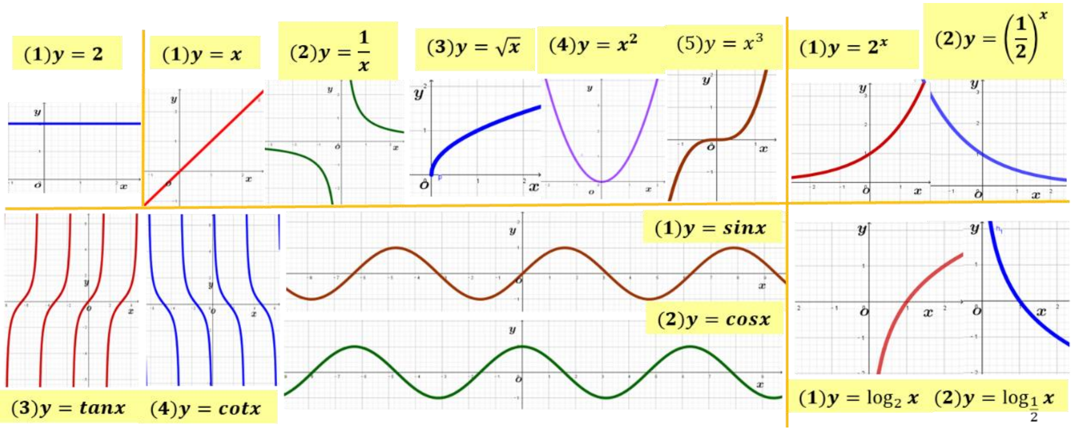
**B. $x^2+1$**

C.$cosx$
D.$sinx$
3. （2024 数IIIT1）下列函数是奇函数的是（ B ）
A. $lnx$
B. $x^3$
C.$cosx$
D.$2^x$
4. （2024 数IIIT2）下列函数是周期函数的（ C ）
A. $x^2$
B. $e^x$
C. $sinx$
D. $arcsinx$
5.（2023 数IIIT2）下列函数是在其定义域内有界的是（ D ）
A. $e^x$
B. $lnx$
C.$x^2$
D.$cosx$
6.（2022 数IIIT2）下列函数是偶函数的是（ B ）
A.$\frac{1}{x}$
B.-$|x|$
C.$lnx$
D.$tanx$
7. （2022 数IIIT5）下列函数在$(0,1)$上单调递减的是（ C ）
A. $lnx$
B. $e^x$
C.$x - lnx$
D.$e^x - x$

## 一、有界性

设集合$\mathrm{I} \subseteq \mathrm{D}$（函数$f(x)$的定义域为D），
函数$f(x)$在区间 I 上有界： ∃M>0 使得$\forall x \in$I,都有$|f(x)| \leq M$.
函数$f(x)$在区间 I 上无界：∀M>0 使得∃$x \in$I,使得$|f(x)| > M$.
函数$f(x)$在区间 I 上有上界： ∃ $M$,使得$\forall x \in$I,都有$f(x) \leq M$;
函数$f(x)$在区间 I 上有下界： ∃ $m$,使得$\forall x \in$I,都有$f(x) \geq m$;
函数$f(x)$在区间 I 上既有上界M也有下界−M： ∃ M>0,使得$\forall x \in$I,都有$-\mathrm{M} \leq f(x) \leq \mathrm{M}$.
函数$f(x)$在整个定义域有界，称为有界函数.
**命题：函数$f(x)$在区间 I 上有界⇔函数$f(x)$在区间 X 上既有上界也有下界.**

①函数的有界性类似于函数的单调性,可以是函数整体的性质，也可以是函数部分的性质.有的函数如y=tanx在整个定义域上无界，但可以存在有界区间，如在$\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$上确实有界的。因此，说函数的有界性一定要说区间.
②判断函数的有界性，实质上就是判断函数的值域，只要值域在一个确定的范围之内就是有界.
③值域是无穷区间一定是无界的.



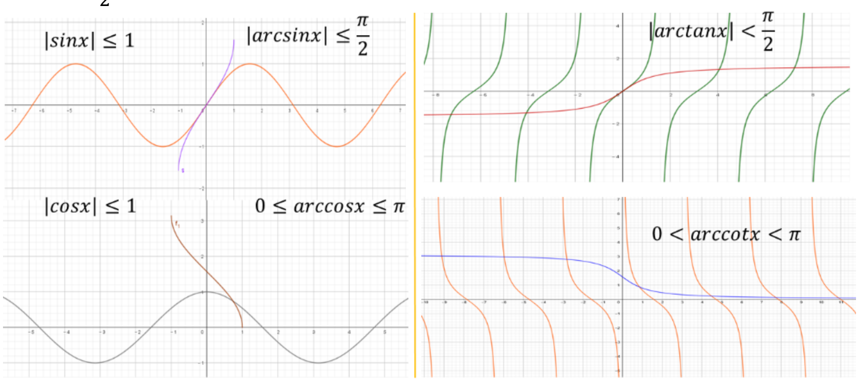

**【探究活动】** 下面我们将从分析基本初等函数的图像入手,**讨论下列常见的函数的有界性**，掌握常见函数的有界性。

**1.常见函数的有界性**

通过分析，我们发现，上述函数只有两类函数是有界的.

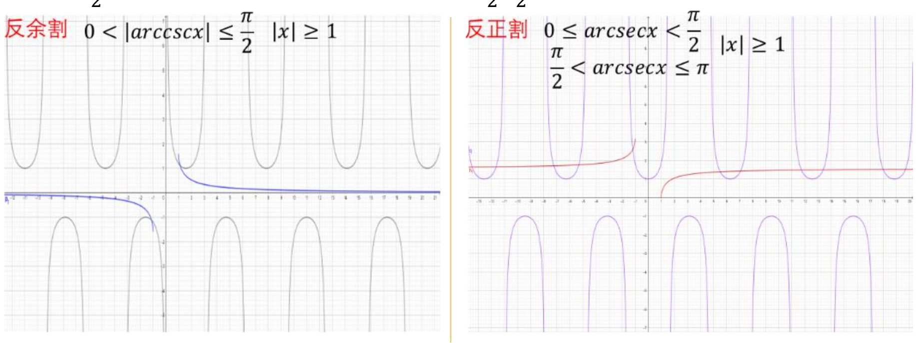
①常函数有界

②正、余弦函数有界。其他三角函数和反函数的有界性如何呢？$|sinx|\le 1,|arcsinx|\le\frac{\pi}{2};|cosx|\le 1,0\le arccosx\le\pi;|arctanx|<\frac{\pi}{2};0<arccotx<\pi$




③三角函数只有正余弦函数有界；而所有的反三角函数都是有界的。

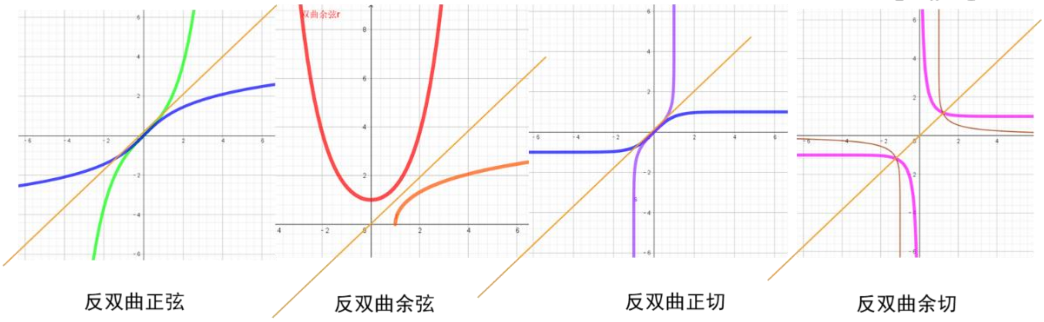
反余割$0<|arccscx|\le\frac{\pi}{2},|x|\ge 1$;反正割$0\le arcsecx<\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}<arcsecx\le\pi,|x|\ge 1$




④双曲函数里只有双曲正切有界$thx=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

$sinhx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\quad$ $coshx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\quad$ $tanhx = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ $\quad$ $cothx = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

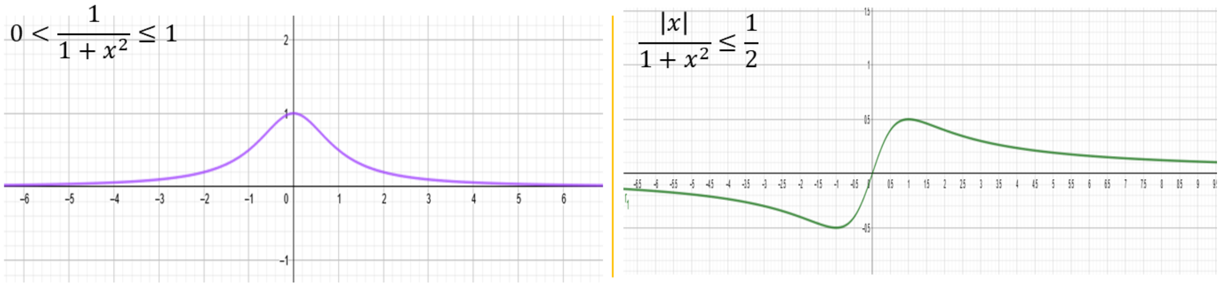
$arcsinhx = ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ $\quad$ $arcoshx = ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ $\quad$ $arcthx = \frac{1}{2} ln \frac{1 + x}{1 - x}$ $\quad$ $arcothx = \frac{1}{2} ln \frac{x + 1}{x - 1}$



反双曲正弦 反双曲余弦 反双曲正切 反双曲余切

⑤分段函数里有界的函数有：符号函数、和迪利克雷函数。

⑥其他常见的有界函数还有：$y = \frac{1}{1+x^2}; y = \frac{x}{1+x^2}. 0 < \frac{1}{1+x^2} \le 1; \frac{|x|}{1+x^2} \le \frac{1}{2}$

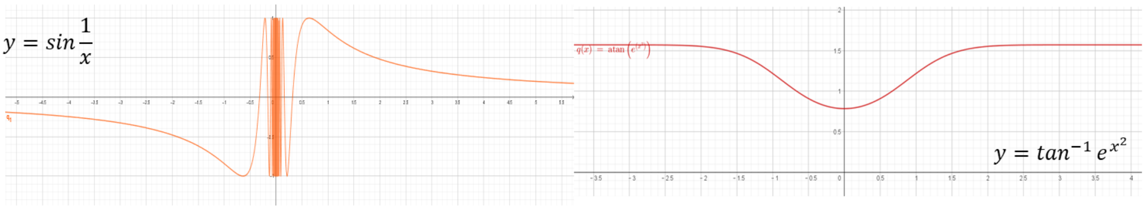



## 2.复合函数的有界性

**“外函数有界，复合函数必有界.”**例如：

①$y = sin\frac{1}{x}$有界

②$y = tan^{-1} e^{x^2}$有界

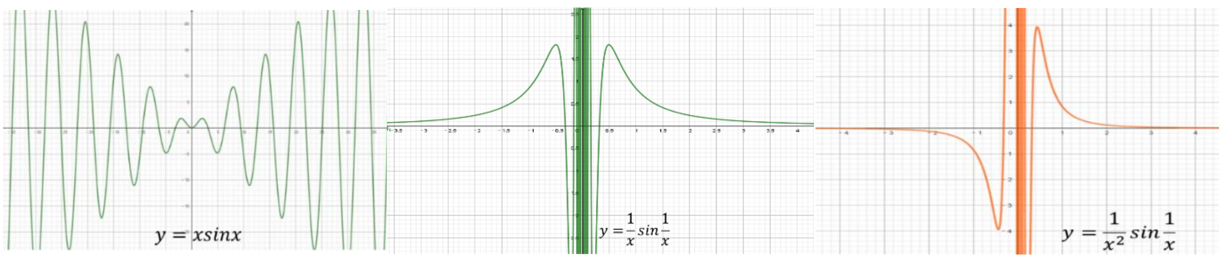



## 3.区间上的有界性

①$y = x\sin x, x\epsilon(0, +\infty)$无界, 在$(\mathbf{0}, \mathbf{1})$有界

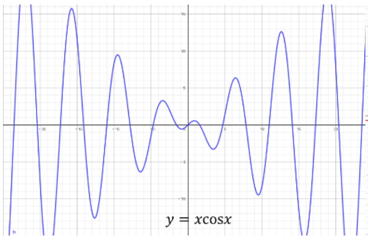
②$y = \frac{1}{x} sin\frac{1}{x}, x\epsilon(0,1]$无界, $x \in (1, +\infty)$有界

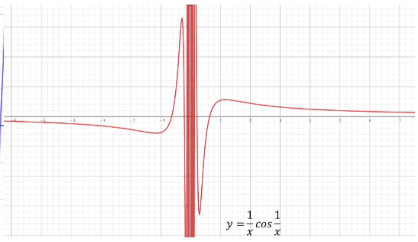
③$\boldsymbol{y = \frac{1}{x^2} sin\frac{1}{x}}$在$(\mathbf{0}, \mathbf{1})$无界，在$[\mathbf{1}, +\infty)$有界




④$y = x\ cosx, x \in (1, +\infty)$无界, $x \in (0,1)$有界

⑤$y = \frac{1}{x} cos\frac{1}{x}, x \in (0,1)$无界, $x \in (1, +\infty)$有界

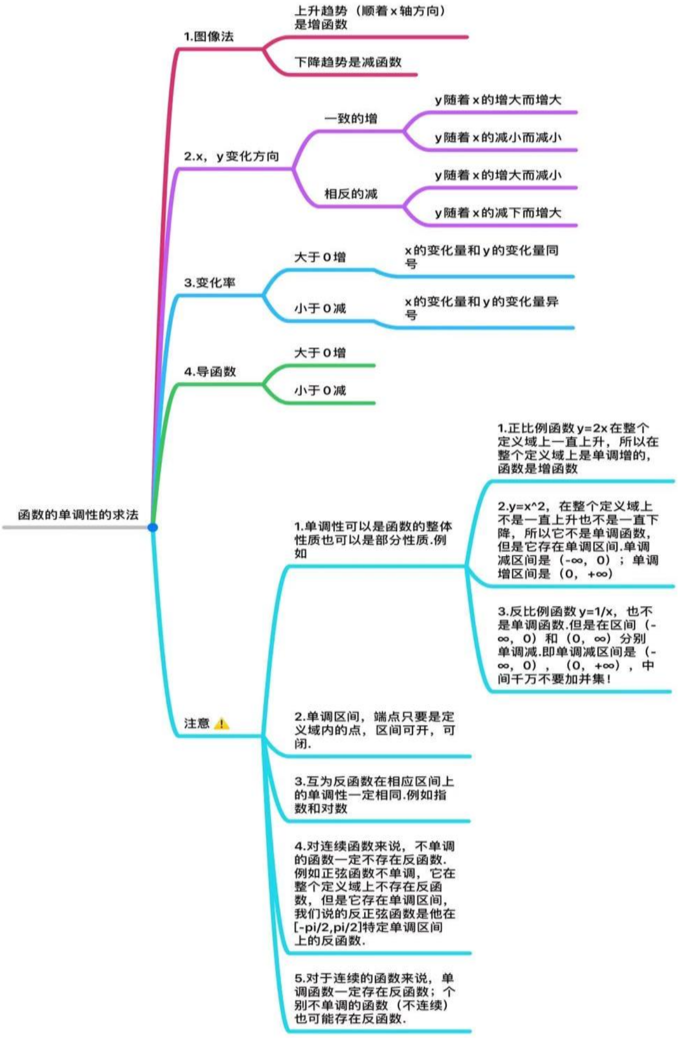



# 二、单调性

设集合$I \subset D$（函数$f(x)$的定义域为D）
函数$f(x)$在区间 I 上单调增加：　$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;
函数$f(x)$在区间 I 上单调减少：　$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$;
函数$f(x)$在整个定义域上单调增加或减少的函数称为单调函数，有的函数在整个定义域上不单调但是可以存在单调区间，例如：$y = sinx$不是单调函数，但存在单调区间.

## 1. 常见函数的单调性




## 2. 复合函数的单调性

**“同增异减”**

# 三、奇偶性

设函数$f(x)$的定义域关于原点对称，即$\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.
函数$f(x)$是偶函数：自变量取互为相反数的时候，函数值相等.

$$\forall x \in D, \text{都有} f(-x) = f(x).$$

函数$f(x)$是奇函数：自变量取互为相反数的时候，函数值也互为相等.

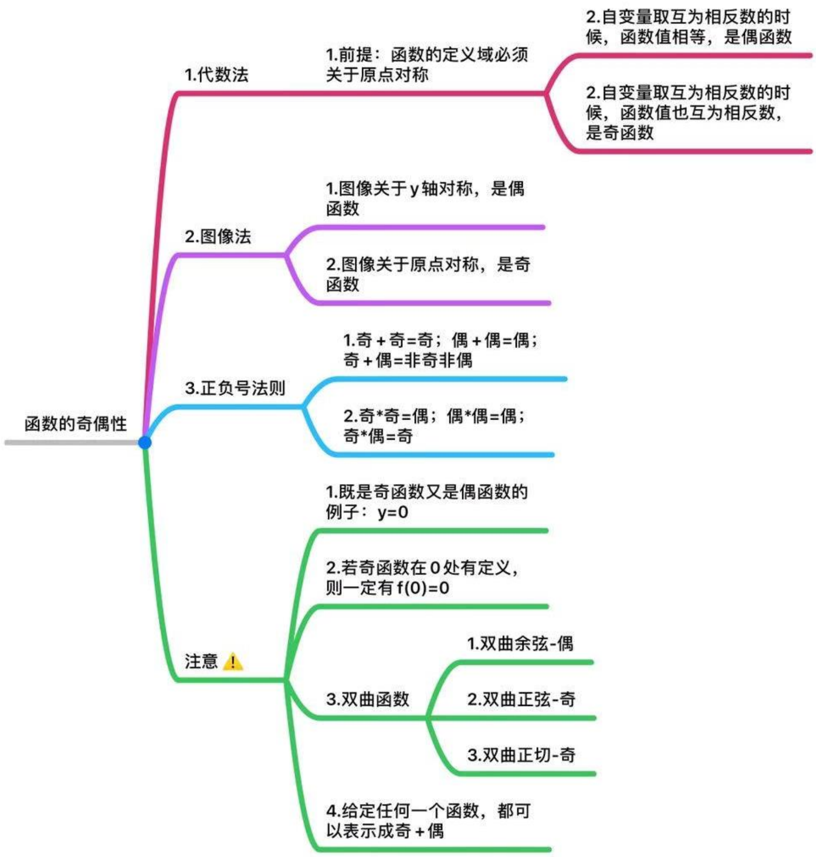
$$\forall x \in D, \text{都有} f(-x) = -f(x).$$

① 奇函数的图像关于原点对称；
② 偶函数的图像关于y轴对称；
③奇函数$f(x)$在$x=0$处有定义，则必有$f(0)=0$；事实上，$f(0)=f(-0)=-f(0)$，得$f(0)=0$.

**函数的奇偶性分解**
设函数$f(x)$的定义域关于原点对称，
① 则$f(x)+f(-x)$总是偶函数，例chx=$\frac{e^x+e^{-x}}{2}$，$\sqrt[3]{(1+x)^2}+ +\sqrt[3]{(1-x)^2}$
② $f(x)-f(-x)$总是奇函数,例$shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$，$\ln\frac{1+x}{1-x}=2arthx= ln(1+x)-ln(1-x)$
③ 给定$f(x)$，$x\in(-l, l)$，则任何函数都可以表示成一个奇+一个偶

$$f(x)=\underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{\text{偶函数}}+\underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{\text{奇函数}}$$

例如，指数函数$y=e^x$,由$g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$是偶函数，$h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$是奇函数，得偶函数$chx=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$(双曲余弦)，奇函数$shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ (双曲正弦)，从而$e^x= chx+shx=\frac{e^x+e^{-x}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.



**常见的奇函数和偶函数**

①常见的偶函数：$C$、$x^2$、$x^{2n}$、$|x|$、$cosx$、$\sec x$、$e^{x^2}$、$sinx^2$、$chx=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

②常见的奇函数：$x$、$x^3$、$x^{2n+1}$、$x^{-1}$、$\sqrt[3]{x}$、$sinx$、tanx、$cotx$、$\csc x$、$\arcsin x$、$\arctan x$、$shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$、$thx=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$、$arthx$

③一些较难的奇函数：$2arcthx=\ln\frac{1+x}{1-x}$、$arcsinhx=ln(x+\sqrt{x^2+1})$、$\frac{a^x+1}{a^x-1}$

**奇（偶）性法则**

① **四则运算："正负号法则"**(减、除法转化成加、减法)

**奇+奇=奇；奇+偶=非奇非偶；偶+偶=偶**

**奇×奇=偶；奇×偶=奇；偶×偶=偶**

②复合法则： **"同类复合奇偶不变,异类复合必为偶"**

## 四、周期性

设函数$f(x)$的定义域 D,$\exists l>0$，$\forall x\in D$,都有$x+l\in D$,且$f(x+l)=f(x)$恒成立，则称$f(x)$是以$l$为周期的周期函数.

① **通常我们说的周期都是指最小正周期;**
② **常函数 y=C 是周期函数（任何正数均为其周期，没有最小正周期）;**
③ **迪利克雷函数以任何正有理数为周期（没有最小正周期）.**

命题1：函数$f(x)$的周期是$l$，则周期的整数倍$kl$都是$f(x)$的周期.

命题2：函数$f(x)$的周期是$l$，则$f(ax+b)$的周期是$\frac{l}{|a|}$.

命题3：若函数$f(x)$和 $g(x)$分别以$l_1$，$l_2$为周期，则$\boldsymbol{f(x)\pm g(x)}$以$l_1$，$l_2$的最小公倍数为周期.

命题4：若函数$\varphi(x)$是周期函数，则复合函数$\boldsymbol{f(\varphi(x))}$，也是周期函数.例$e^{sinx}$、$sin^2x$也是周期函数.

## 五、利用性质画草图（技能训练）

1.一次函数：$y=kx+b(k\neq 0)$
"两点法"
（1）与x轴交点
（2）与y轴交点
2. 二次函数：例：$y=x^2+2x-3$
"一轴多点法"
（1）对称轴
（2）与x轴交点（2个），与y轴交点（1个）
（3）顶点
利用开口方向和对称性作图
3. 反比例函数：例：$y=\frac{1}{x}$
"过定点和不过定点法" 利用单调性作图
（1）过定点（1,1）（-1，-1）
（2）不过定点（0,0）

（3）渐近线x轴和y轴

4. 指数函数：例：$y = 2^x$，$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

（1）过定点（0,1），辅助线y=1

（2）渐近线x轴

利用单调性作图.

5.对数函数："反函数法"关于y=x对称

（1）过定点（1,0）辅助线x=1

（2）渐近线y轴

利用单调性作图

6.正余弦函数："五点法"，利用周期性作图

7.正切函数：

（1）过定点（0,0）

（2）渐近线

（3）一个周期内单调增

（4）奇函数

**【专升本链接】**

1.（2019.理工）函数$f(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2}$,则$f(x)$是(　　).

A. 奇函数

B. 偶函数

C. 非奇非偶函数

D. 周期函数

分析：$f(-x) = \frac{a^{-x} - a^x}{2} = -\frac{a^x - a^{-x}}{2} = -f(x)$

2.（2015.理工）$f(x) = \ln(x-1)$在区间$(1, +\infty)$上是(　　).

A. 单调递减函数

B. 单调递减函数

C. 非单调函数

D. 有界函数

分析：$f(x) = \ln(x-1)$是函数$f(x) = \ln x$向右平移一个单位得到，由对数函数的图像可得该函数在$(1, +\infty)$是单调递增且是无界的.

3.（2014.工商）$f(x) = \lg(x+1)$在(　　)内有界.

A. $(1, +\infty)$

B. $(2, +\infty)$

C. $(1,2)$

D. $(-1,1)$

分析：$f(x) = \lg(x+1)$是函数$f(x) = \lg x$向左平移一个单位得到，该函数有渐近线x=-1，通过图像可以直观地看出，上述选项中该函数只在(1,2)是有界的.

4. （2014.经管）设$f(x)$是定义在区间$(-\infty, +\infty)$上的函数，且$f(x) \neq C$，则下列必是奇函数的是(　　).

A. $f(x^3)$

B. $[f(x)]^3$

C. $f(x) \cdot f(-x)$

D. $f(x) - f(-x)$

分析：由定义判断.

5.下列函数中为奇函数的是(　　)

A. $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

B. $f(x) = e^{|x|}$

C. $f(x) = \cos x$

D. $f(x)=\frac{\sqrt{(x-1)^2}\sin x}{|x-1|}$

6.（2009工商）下列函数在区间$(-\infty,+\infty)$上单调减少的是（ ）。

A. $sinx$

B. $2^x$

C.$x^2$

D. $3-x$

7.(2015计算机)函数$y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$是( ).

A. 奇函数

B. 偶函数

C. 非奇非偶函数

D.无法判定

8.（2014计算机）函数y=|$xcos(-x)$|是（ ）。

A. 有界函数

B. 偶函数

C. 单调函数

D.周期函数

9. （2012计算机）函数y=xtanx是（ ）。

A. 有界函数

B. 偶函数

C. 单调函数

D.周期函数

10. 设$\mathrm{y}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{x}}}{1+\mathrm{e}^{\mathrm{x}}}$，则y的反函数为( ).

$A.y=ln\frac{1-x}{x}$

$B.y=ln\frac{x}{1+x}$

$C.y=ln\frac{x}{1-x}$

$D.y=ln\frac{1+x}{x}$

11. 下列函数中为非奇函数的是( ).

$A.f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$

$B.f(x)=lg\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

$C.f(x)=x\,arccos\frac{x}{1+x^2}$

$D.f(x)=\sqrt{x^2+3x+7}-\sqrt{x^2-3x+7}$

12. 设$f(x-2)=x^2-2x+3$,则$f(x+h)=($ $)$.

$A.(x+h)^2-2(x+h)+3$

$B.(x+h)^2+2(x+h)+3$

$C.(x+h)^2-2(x+h)-3$

$D.(x+h)^2+2(x+h)-3$

13. *判断*$D(x)=\begin{cases}1,x\text{为有理数},\\0,x\text{为无理数}.\end{cases}$ $D(x)$*是否为初等函数*( ).

*A.是*

*B.否*

*14.（2016计算机）假设函数*$f(x)=sin\frac{x}{2}+cos\frac{x}{3}$,*则*$f(x)$*的周期为*____.

*分析：*$sin\frac{x}{2}$*的周期为*$\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$，$cos\frac{x}{3}$*的周期为*$\frac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi$，$f(x)$*最小正周期为两者的最小公倍数，即*$12\pi$.

*答案：A、B、C、D、A、D、A、B、B、C、C、B、B、12* $\boldsymbol{\pi}$.