

En todo triángulo cualquiera se cumple que la sumatoria de sus ángulos internos es de  $180^\circ$ . En un triángulo regular o equilátero cada ángulo es de  $60^\circ$ , ya que  $\left[\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ\right]$ . A medida que aumentan los lados de un polígono regular, también aumenta la sumatoria de sus ángulos internos en  $180^\circ$  por cada lado añadido (ya que se puede formar varios triángulos dentro de un mismo polígono regular a partir de sus vértices y lados). Por lo tanto en un cubo se pueden formar 2 triángulos, en un pentágono 3 triángulos, y así sucesivamente.

Se tiene entonces que, la sumatoria de los ángulos internos de un polígono regular, vendrá dada por la siguiente fórmula  $\left[\frac{180^\circ \cdot (n-2)}{n}\right]$ , donde  $n$  es un número natural y el número de lados que tiene el polígono.

Así, los ángulos internos de un polígono regular de 5 lados (pentágono) viene dado por  $\left[\frac{180^\circ \cdot (5-2)}{5} = \frac{180^\circ \cdot 3}{5} = \frac{540^\circ}{5} = 108^\circ\right]$  Entonces, los ángulos internos del pentágono es de  $108^\circ$

Si se traza una recta  $\overline{AD}$  y  $\overline{BD}$  dividimos el ángulo  $\sphericalangle D$  en tres partes iguales  $\left[\frac{108^\circ}{3} = 36^\circ\right]$  formándose tres triángulos isósceles  $\triangle ADE$ ,  $\triangle BCD$  y  $\triangle ABD$ . Nos interesa conocer sus ángulos internos.

- En los triángulos  $\triangle ADE$  y  $\triangle BCD$  se sabe que en un triángulo cualquiera se cumple que  $180^\circ = \alpha + \beta + \gamma$ , donde  $\alpha$  es  $108^\circ$  y  $\beta$  es  $36^\circ$ . Entonces despejamos  $\gamma$ :

$$180^\circ = 108^\circ + 36^\circ + \gamma$$

$$180^\circ - 144^\circ = \gamma$$

$$36^\circ = \gamma$$

Por lo tanto, los ángulos internos de los triángulos  $\triangle ADE$  y  $\triangle BCD$  son  $108^\circ$ ,  $36^\circ$  y  $36^\circ$  en ambos triángulos.

- En el triángulo  $\triangle ABD$  los ángulos  $\sphericalangle EAB$  y  $\sphericalangle ABC$  miden  $108^\circ$ . El ángulo  $108^\circ$  puede reescribirse de la siguiente manera  $108^\circ = \varepsilon + \delta$ , donde  $\varepsilon = 36^\circ$ . Entonces despejamos  $\delta$ :

$$108^\circ = 36^\circ + \delta$$

$$108^\circ - 36^\circ = \delta$$

$$72^\circ = \delta$$

Por lo tanto, los ángulos internos del triángulo  $\triangle ABD$  son  $36^\circ$ ,  $72^\circ$  y  $72^\circ$

Al prolongar los lados  $\overline{AE}$  y  $\overline{CD}$  del pentágono, y luego interceptando las rectas en un punto G, se forma el triángulo  $\triangle EDG$ . Por ángulos suplementario se tiene que  $180^\circ = \theta + \lambda$ , donde  $\theta$  es  $108^\circ$ ; y que la sumatoria de los ángulos internos de un triángulo es de  $180^\circ$ . Entonces despejamos  $\lambda$  y calculamos el ángulo faltante  $\omega$ :

$$180^\circ = 108^\circ + \lambda_1$$

$$180^\circ - 108^\circ = \lambda_1$$

$$72^\circ = \lambda_1$$

$$180^\circ = (36^\circ + 36^\circ + 36^\circ) + \lambda_2$$

$$180^\circ - 108^\circ = \lambda_2$$

$$72^\circ = \lambda_2$$

$$180^\circ = \lambda_1 + \lambda_2 + \omega$$

$$180^\circ = 72^\circ + 72^\circ + \omega$$

$$180^\circ - 144^\circ = \omega$$

$$36^\circ = \omega$$

Por lo tanto se cumple que los ángulos internos del triángulo  $\triangle EDG$  son  $36^\circ$ ,  $72^\circ$  y  $72^\circ$

De todo lo anterior se puede observar lo siguiente:  $\triangle ABD \approx \triangle EDG$   $\triangle ADE \approx \triangle BCD$   $\triangle ADG \sim \triangle ADE$   
 $\triangle ADG \sim \triangle BCD$ .  $\overline{GD} = \overline{GE} = \overline{DA} = \overline{DB}$   $\overline{AE} = \overline{DE}$  Y que todos los triángulos formados son triángulos isósceles.

Por consiguiente, los triángulos  $\triangle ADG$  y  $\triangle ADE$  son semejantes por el criterio AAA, en donde tiene los ángulos internos iguales y los lados proporcionales. Así se tiene que:  $\frac{DA}{ED} = \frac{GD}{AE} = \frac{AG}{DA}$   $\sphericalangle AED = \sphericalangle GDA$   $\sphericalangle DAE = \sphericalangle AGD$   $\sphericalangle EDA = \sphericalangle DAG$