Teoría – Tema 1

Teoría - 2 - propiedades de los números reales - intervalos, unión e intersección

El cuerpo de los números reales

Los números naturales son $\mathbb{N}=\{1,2,3,4,5...\}$.

Los números enteros son $\mathbb{Z}=\{...-5,-4,-3,-2,0,1,2,3,4,5...\}$. Los enteros incluyen a los naturales. Tanto los enteros como los naturales son un conjunto de infinitos términos numerables (siempre sabemos qué número sigue a otro dado).

Los números fraccionarios son aquellos que se forman como fracción de número enteros. Por ejemplo: $\mathbb{Q}=\{...-\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{3}{7},\frac{4}{2}...\}$. Los fraccionarios engloban a los enteros. Los fracciones forman un conjunto infinito no numerable (dado un número, no sabemos cuál sería el siguiente).

Los irracionales son aquellos que no pueden escribirse en forma de fracción de números enteros. Por ejemplo: $I=\{...\pi,e...\}$. Son números con infinitos decimales y forman un conjunto disjunto con los fraccionarios (no tienen términos en común).

Englobando a fracciones e irracionales encontramos a los número reales $\mathbb{R}$, que serán nuestra herramienta de trabajo básica en la asignatura.

En secundaria estudiamos propiedades básicas que cumplen los números reales. Recordemos brevemente las más importantes.

La suma de números reales es conmutativa y asociativa. Su elemento neutro es el 0 . Dado un número real x su término simétrico en la suma es $-x$.

El producto de números reales es conmutativo y asociativo. Su elemento neutro es el 1 . Dado un número real x su término simétrico en el producto es $\frac{1}{x}$ (salvo para $x=0$, ya que en matemáticas no existe la división por 0).

El producto es distributivo respecto de la suma. Es decir: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$.

Con estas propiedades se dice que los números reales con las operaciones suma y producto tienen estructura de cuerpo matemático.

Algunas cosillas de **culturilla general numérica** que seguro hemos estudiado alguna vez:

- No está permitido dividir por 0 .
- Cualquier número elevado a 0 vale 1 .
- La raíz de índice par de un número negativo no es un número real (más adelante

hablaremos de números complejos, donde sí está definida la raíz par de números negativos).

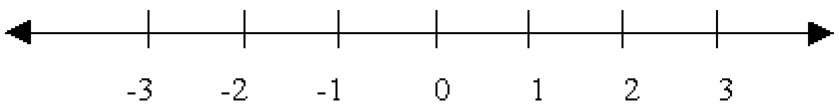
- Un exponente negativo se puede expresar de la forma → $a^{-b}=\frac{1}{a^b}$
- La división de fracciones resulta → $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$

Errores típicos en operaciones elementales que iremos repasando en los problemas que plantearemos en clase:

- Factorizar mal.
- Despejar mal cuando una expresión queda igualada a 0.
- Simplificar mal en cocientes de polinomios.
- Aplicar mal las identidades notables.
- Olvidar el signo negativo al aplicar raíz cuadrada.

Punto, intervalo y acotación

Un valor real $x \in \mathbb{R}$ podemos representarlo en la recta real. Matemáticamente sería un punto dentro de esa recta, es decir, una entidad matemática ideal (sin tamaño) que ocupa una posición dentro de la infinita recta real que se propaga desde menos infinito $(-\infty)$ hasta más infinito $(+\infty)$.



Un intervalo será el conjunto de infinitos puntos contenidos entre un punto de inicio y un punto de fin. Los paréntesis ( ) indican extremos abiertos y los corchetes [ ] extremos cerrados. Un extremo abierto indica que el punto no se incluye en el intervalo, y un extremo cerrado indica que el punto sí se incluye en el intervalo.

De esta forma podemos tener:

- Intervalos abiertos → $(-3,4)$
- Intervalos cerrados → $[2,4]$
- Intervalos semiabiertos o semicerrados → $(-2\,,-1]$, $[1,6)$

Si uno de los extremos es el infinito siempre se usa extremo abierto, creándose lo que se conoce como semirrecta:

- Semirrecta → $(-\infty\,,0)$, $[5,+\infty)$

Un valor que sea mayor o igual que cualquier valor de un intervalo se llama cota superior. Por ejemplo, en $[1,6)$ una cota superior sería el número 8 . Existen infinitas cotas superiores.

Un valor que sea menor o igual que cualquier valor de un intervalo se llama cota inferior. Por ejemplo, en $[1,6)$ una cota inferior sería el número -3 . Existen infinitas cotas inferiores.

Al menor de las cotas superiores se llama supremo. En el ejemplo $[1,6)$ el supremo sería el número 6 .

Al mayor de las cotas inferiores se llama ínfimo. En el ejemplo $[1,6)$ el ínfimo sería el número 1 .

Si el supremo pertenece al intervalo, se denomina máximo. En el ejemplo $[1,6)$ el supremo no es máximo.

Si el ínfimo pertenece al intervalo, se denomina mínimo. En el ejemplo $[1,6)$ el ínfimo sí es mínimo.

Unión e intersección

Unir dos conjuntos implicar elegir los elementos de ambos conjuntos.

Da igual si hay elementos que se repiten o elementos que aparezcan en uno solo de los conjuntos. Los cogemos todos. Escogemos los elementos que están en el conjunto A, o en el conjunto B, o en los dos conjuntos a la vez.

$$A=\{0,2,4,6,8\}$$
$$B=\{0,3,6,9\}$$
$$A\cup B=\{0,2,3,4,6,8,9\}$$

La intersección, por su parte, conlleva elegir solo los elementos comunes a los conjuntos intersectados.

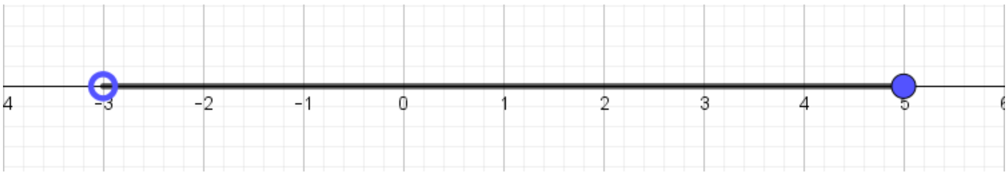
Escogemos solamente los elementos que están en el conjunto A y también en el conjunto B.

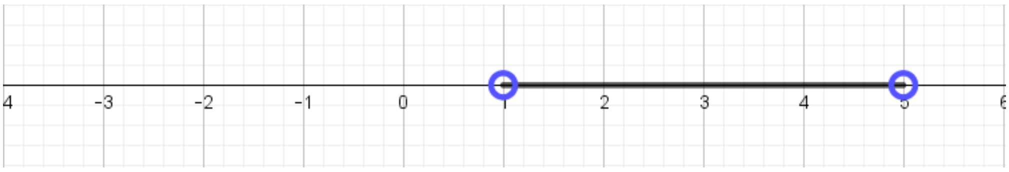
$$A=\{0,2,4,6,8\}$$
$$B=\{0,3,6,9\}$$
$$A\cap B=\{0,6\}$$

Cuando los conjuntos no están formados por valores discretos, sino por un intervalo de números reales, la cosa se puede complicar un poco. Practiquemos esto.

$$A=(-3,5]$$
$$B=(1,5)$$
$$A\cup B=(-3,5]$$
$$A\cap B=(1,5)$$

Puede ser de utilidad dibujar en dos rectas reales, por separado, ambos intervalos y razonar de manera más visual. La unión sería como “pegar” los dos intervalos para tener así todos los elementos de ambos conjuntos, mientras que la intersección sería “solapar” los dos intervalos para quedarnos solo con los elementos en común.





Al unir (“pegar” los intervalos) vemos claramente que el intervalo superior absorbe al intervalo inferior.

$$A \cup B = (-3, 5]$$

Al intersectar (“solapar” los intervalos) el valor 5 no lo escogemos porque en el intervalo superior está incluido (punto cerrado) pero en el intervalo superior no está incluido (punto abierto).

$$A \cap B = (1, 5)$$