Problemas sobre resolver ecuaciones

CURSO	TEMA	WWW.DANIPARTAL.NET
1ºBach CCSS	Repaso 4ºESO	Colegio Marista "La Inmaculada" de Granada

PROBLEMA 1

Resuelve la ecuación $\frac{4}{x-1}-\frac{2x-1}{1+x}=3$.

Obtenemos el m.c.m. de los denominadores de la ecuación racional.

m.c.m: $(x-1)(x+1)$

$$\frac{4(x+1)-(2x-1)(x-1)}{(x-1)(x+1)}=3$$

$$\frac{4x+4-(2x^2-2x-x+1)}{(x-1)(x+1)}=3$$

$$\frac{4x+4-(2x^2-3x+1)}{(x-1)(x+1)}=3$$

$$\frac{-2x^2+7x+3}{(x-1)(x+1)}=3$$

El denominador pasa multiplicando al miembro de la derecha.

$$-2x^2+7x+3=3(x-1)(x+1)$$

$$-2x^2+7x+3=3(x^2-1)$$

$$-2x^2+7x+3=3x^2-3$$

$$-5x^2+7x+6=0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado.

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\cdot(-5)\cdot 6}}{2\cdot(-5)}$$

$$x_1=\frac{-3}{5}$$

$$x_2=2$$

Ambos valores son solución de la ecuación de partida, porque no anulan ninguno de los denominadores de la ecuación racional inicial.

PROBLEMA 2

Resuelve $\frac{3x-3}{x-1}+\frac{x^2+2}{x+1}=\frac{7x+1}{x^2-1}$.

Lo primero que hacemos es sacar el m.c.m de los denominadores:

$$m.c.m: (x-1)(x+1)$$

$$\frac{(3x-3)(x+1)}{(x-1)(x+1)}+\frac{(x^2+2)(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{7x+1}{(x-1)(x+1)}$$

Operamos y ordenamos. Un error muy típico es no usar el m.c.m. en el denominador sino emplear el producto "a lo bruto" de todos los denominadores. Esto alarga el ejercicio y, si no se simplifica, puede llevar a soluciones que no sean válidas por anular algunos de los denominadores de la ecuación de partida.

$$\frac{3x^2+3x-3x-3+x^3-x^2+2x-2}{(x-1)(x+1)}=\frac{7x+1}{(x-1)(x+1)}$$

Igualamos numeradores y agrupamos términos:

$$x^3+3x^2-x^2-3x+3x+2x-7x-2-3-1=0$$

$$x^3+2x^2-5x-6=0$$

Hacemos Ruffini donde obtendremos tres raíces $x=-1,\ \mathrm{x}=2,\ x=-3$. Las soluciones a nuestra ecuación de partida son $x=2,\ x=-3$. No tomamos $x=-1$ por anular algunos de los denominadores iniciales.

PROBLEMA 3

Resuelve $\frac{2x}{x-3}-\frac{x+5}{x+3}+\frac{2x-7}{x^2-9}=0$ **.**

Factorizamos el tercer denominador: $x^2-9=(x-3)(x+3)$

Sustituimos en el tercer denominador.

$$\frac{2x}{x-3}-\frac{x+5}{x+3}+\frac{2x-7}{(x-3)(x+3)}=0$$

$$\frac{2x(x+3)-(x+5)(x-3)+2x-7}{(x-3)(x+3)}=0$$

$$\frac{x^2+6x+8}{(x-3)(x+3)}=0$$

El denominador pasa multiplicando a la derecha, siendo 0 el resultado de ese producto.

$$x^2+6x+8=0$$

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{36-32}}{2}$$

$$x=-2,\ x=-4$$

Son soluciones válidas porque no anulan ninguno de los denominadores de partida.

PROBLEMA 4

Resuelve $34 - x^2 = \frac{225}{x^2}$ **.**

Pasamos el denominador multiplicando al miembro de la izquierda.

$$x^4 - 34x^2 + 225 = 0$$

Tenemos una ecuación bicuadrática que resolvemos con el cambio de variable $t = x^2$.

$$t^2 - 34t + 225 = 0$$
$$t = \frac{34 \pm \sqrt{256}}{2}$$
$$t_1 = 25$$
$$t_2 = 9$$

No debemos olvidar invertir el cambio de variable realizado inicialmente, con objeto de obtener los valores de la incógnita x de partida.

$$x = \pm\sqrt{25} \to x_1 = 5,\ x_2 = -5$$
$$x = \pm\sqrt{9} \to x_3 = 3,\ x_4 = -3$$

Cuatro soluciones para una ecuación polinómica de cuarto grado. Los cuatro valores son solución por no anular el denominador de la ecuación de partida.

PROBLEMA 5

Resuelve $\frac{1}{x^2-1}+\frac{x^2+1}{2}=\frac{17}{6}$ **.**

Calculamos el m.c.m. de los tres denominadores.

$$m.c.m: 6(x^2-1)$$

$$\frac{6}{6(x^2-1)}+\frac{3(x^2+1)(x^2-1)}{6(x^2-1)}=\frac{17(x^2-1)}{6(x^2-1)}$$

Al tener el mismo denominador en las tres fracciones, igualamos directamente los numeradores.

$$6+3(x^2+1)(x^2-1)=17(x^2-1)$$

$$6+3(x^4-1)=17x^2-17$$

$$6+3x^4-3=17x^2-17$$

$$3x^4-17x^2+20=0$$

Ecuación bicuadrática. Cambio de variable $x^2=t$.

$$3t^2-17t+20=0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado, obteniendo las soluciones:

$$t_1=4$$

$$t_2=\frac{5}{3}$$

Deshacemos el cambio de variable.

$$x^2=4 \rightarrow x=\pm 2$$

$$x^2=\frac{5}{3} \rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{5}{3}}$$

Los cuatro valores son solución, ya que no anulan los denominadores de la ecuación racional de partida.

PROBLEMA 6

Resuelve $\sqrt{2x+3}-\sqrt{3x+7}=-1$.

En el miembro de la izquierda tenemos dos raíces. En el miembro de la derecha aparece un número real. Elevamos al cuadrado cada miembro de la ecuación.

$$\left(\sqrt{2x+3}-\sqrt{3x+7}\right)^2=(-1)^2$$

En el término de la izquierda aplicamos el binomio de la suma: cuadrado del primer término más cuadrado del segundo término menos el doble producto del primero por el segundo.

$$\left(\sqrt{2x+3}\right)^2+\left(\sqrt{3x+7}\right)^2-2\sqrt{2x+3}\sqrt{3x+7}=1$$

$$2x+3+3x+7-2\sqrt{(2x+3)(3x+7)}=1$$

Operamos para dejar aislado, en un miembro, el término con raíz cuadrada.

$$5x+9=2\sqrt{(2x+3)(3x+7)}$$

Volvemos a elevar al cuadrado ambos miembros.

$$(5x+9)^2=\left[2\sqrt{(2x+3)(3x+7)}\right]^2$$

$$25x^2+81+90x=2^2(2x+3)(3x+7)$$

$$25x^2+81+90x=4(6x^2+14x+9x+21)$$

$$25x^2+81+90x=4(6x^2+23x+21)$$

$$25x^2+81+90x=24x^2+92x+84$$

$$x^2-2x-3=0$$

Las soluciones de esta ecuación de segundo grado son:

$$x_1=-1$$

$$x_2=3$$

¡Ojo! La ecuación de partida contiene raíces. Y hemos elevado al cuadrado en el proceso de solución. Esto implica que los candidatos a solución deben ser testeados en la ecuación de partida, para comprobar que los discriminantes no se hacen negativos y para comprobar que la igualdad se cumple.

Si $x=-1\ \rightarrow \sqrt{2(-1)+3}-\sqrt{3(-1)+7}=-1 \rightarrow \sqrt{1}-\sqrt{4}=-1 \rightarrow -1=-1 \rightarrow es\ solución$

Si $x=3\ \rightarrow \sqrt{2(3)+3}-\sqrt{3(3)+7}=-1 \rightarrow \sqrt{9}-\sqrt{16}=-1 \rightarrow -1=-1 \rightarrow es\ solución$

PROBLEMA 7

Resuelve $\sqrt{3x+1} = \sqrt{2x-1} - 1$.

Llevamos las dos raíces a un mismo miembro de la ecuación.

$$1 = \sqrt{3x+1} - \sqrt{2x-1}$$

Elevamos ambos miembros al cuadrado.

$$(1)^2 = \left(\sqrt{3x+1} - \sqrt{2x-1}\right)^2$$

$$1 = \left(\sqrt{3x+1}\right)^2 + \left(\sqrt{2x-1}\right)^2 - 2\sqrt{3x+1}\sqrt{2x-1}$$

$$1 = 3x + 1 + 2x - 1 - 2\sqrt{(3x+1)(2x-1)}$$

$$2\sqrt{(3x+1)(2x-1)} = 5x - 1$$

Nuevamente, elevamos al cuadrado.

$$\left[2\sqrt{(3x+1)(2x-1)}\right]^2 = (5x-1)^2$$

$$2^2(3x+1)(2x-1) = 25x^2 + 1 - 10x$$

$$4(6x^2 - 3x + 2x - 1) = 25x^2 + 1 - 10x$$

$$4(6x^2 - x - 1) = 25x^2 + 1 - 10x$$

$$24x^2 - 4x - 4 = 25x^2 + 1 - 10x$$

$$-x^2 + 6x - 5 = 0$$

Las soluciones de la ecuación de segundo grado son:

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 5$$

Como hemos elevado al cuadrado en el proceso de resolución, debemos sustituir los candidatos a solución en la ecuación de partida para comprobar que los discriminantes no son negativos y que la igualdad se cumple.

Si $x = 1 \rightarrow \sqrt{3(1)+1} = \sqrt{2(1)-1} - 1 \rightarrow \sqrt{4} = \sqrt{1} - 1 \rightarrow 2 = 0 \rightarrow Absurdo \rightarrow No\ es\ solución$

Si $x = 5 \rightarrow \sqrt{3(5)+1} = \sqrt{2(5)-1} - 1 \rightarrow \sqrt{16} = \sqrt{9} - 1 \rightarrow 4 = 2 \rightarrow Absurdo \rightarrow No\ es\ solución$