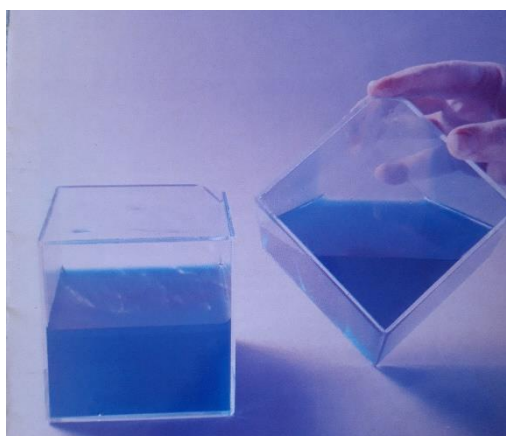




### Cortes no cubo

Que tipo de polígonos é possível obter por interseção de um plano e um cubo?



Se colocarmos líquido num cubo, veremos à superfície um polígono delimitado pelas suas faces cuja forma dependerá da posição do cubo e da quantidade de líquido no interior.

Investigar as diferentes possibilidades de polígonos corresponde a investigar a interseção de um plano por um cubo. Para tal, vamos recorrer ao GeoGebra.


Abre uma folha 3D e constrói um cubo. Começamos por investigar situações particulares. Investiga a interseção que se obtém quando:

1. **o plano é paralelo a uma face** (começa por definir o plano da face usando a ferramenta



Plano e três vértices dessa face; constrói um ponto pertencente a uma aresta perpendicular à face inicial e, finalmente, o plano de corte com a ferramenta Plano

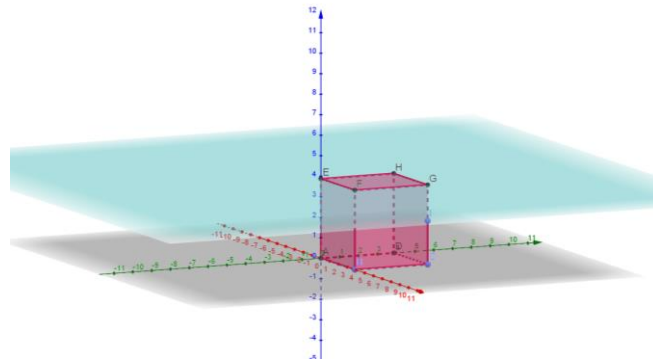


paralelo. Obtém ainda a interseção das duas superfícies  reparando que o polígono se destaca quando apontamos para o cubo e o plano de interseção).

Arrasta o ponto criado na aresta para investigar as possibilidades. Para visualizar melhor a secção, esconde o plano da face inicialmente criado.

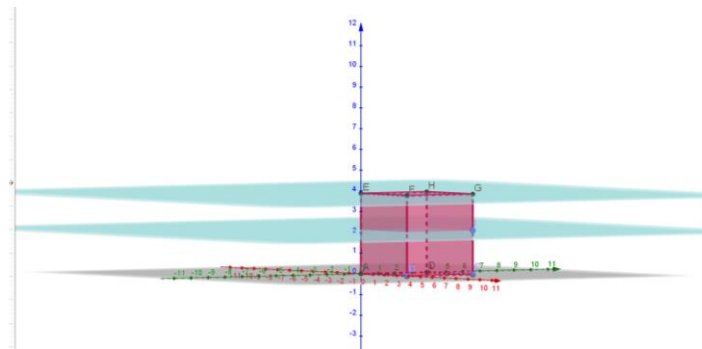
**Figura 1**

*Representação da resolução feita pela aluna no GGB, relativamente ao plano da face do cubo.*



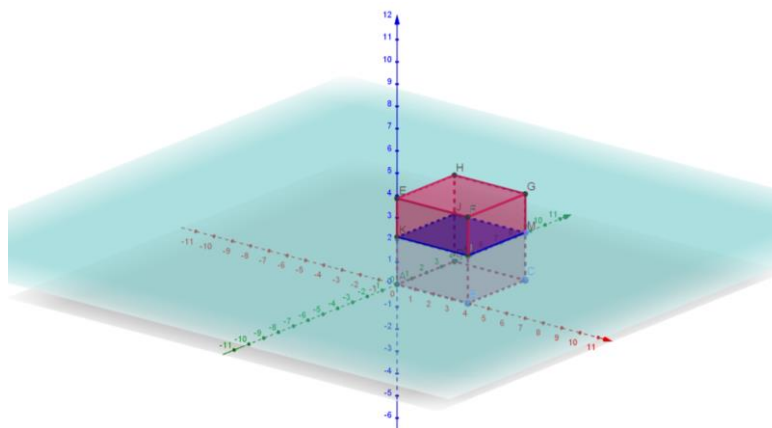
**Figura 2**

*Representação da resolução feita pela aluna no GGB, relativamente ao plano da face e ao plano de corte*



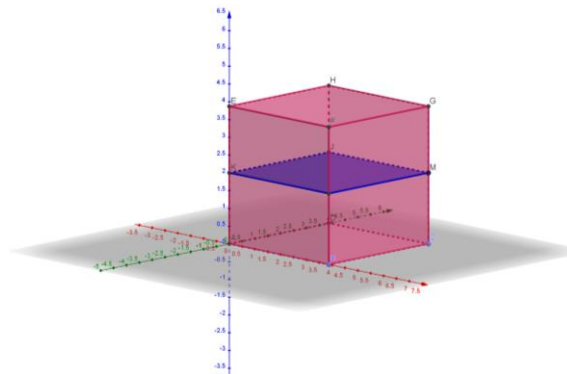
**Figura 3**

*Representação da resolução feita pela aluna no GGB, relativamente ao plano de corte e o polígono formado por este, no cubo.*





**Figura 4**


Representação da resolução feita pela aluna no GGB, com destaque para o polígono formado pelo plano de corte do cubo.



Ao mover o ponto pertencente ao plano, que intersesta uma das arestas do cubo, podemos verificar que a superfície de corte é sempre um quadrado, com as mesmas dimensões que o quadrado formado pela base do cubo.

2. **o plano é paralelo a duas diagonais faciais opostas** (começa por definir o plano que

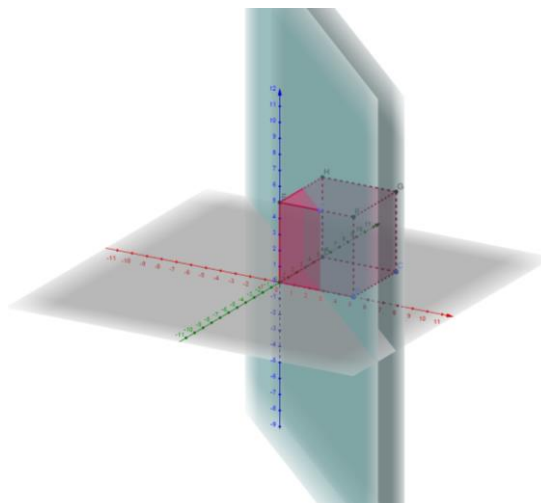
contém as duas diagonais faciais usando a ferramenta Plano  e três vértices; constrói um ponto pertencente a uma aresta que contenha um desses vértices e, finalmente, o plano de interseção com a ferramenta Plano paralelo .

Obtém ainda a interseção das duas superfícies  )

Arrasta o ponto criado na aresta para investigar as possibilidades. Para visualizar melhor a secção, esconde o plano que contém as duas diagonais inicialmente criado.

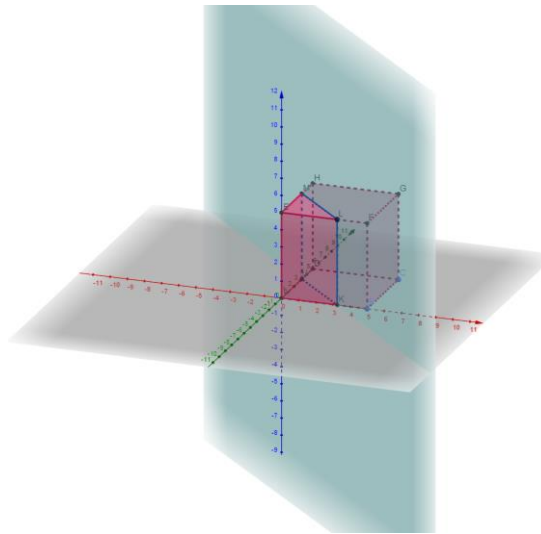
**Figura 5**

Representação da resolução feita pela aluna no GGB, com o desenho dos planos das diagonais faciais do cubo.





### Figura 6

Representação da resolução feita pela aluna no GGB, com o desenho dos planos das diagonais das faces do cubo, evidenciando a figura – retângulo - que fica no cubo, “após” o corte do plano.

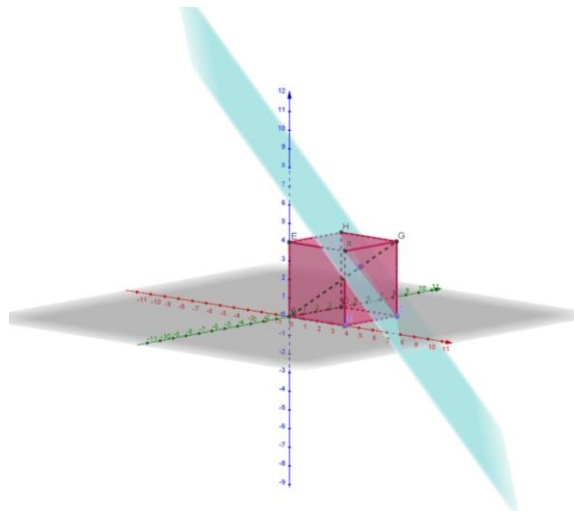


A secção formada pelo plano paralelo às diagonais faciais vai ser sempre um retângulo.

3. **o plano é perpendicular à diagonal espacial** (começa por construir a diagonal espacial e um ponto nessa diagonal; constrói um plano que contenha esse ponto e seja perpendicular à diagonal usando a ferramenta Plano perpendicular ; obtém a interseção das duas superfícies )

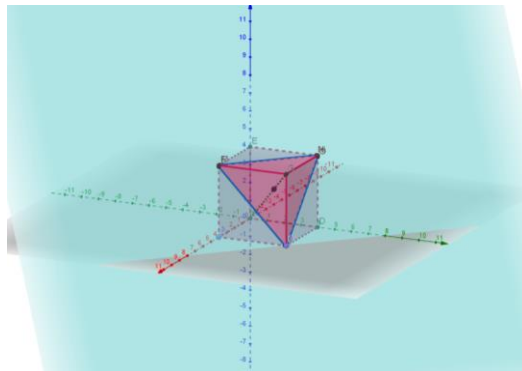
### Figura 7

Representação da resolução feita pela aluna no GGB, com o desenho do plano perpendicular à diagonal espacial, que se encontra desenhada a tracejado.



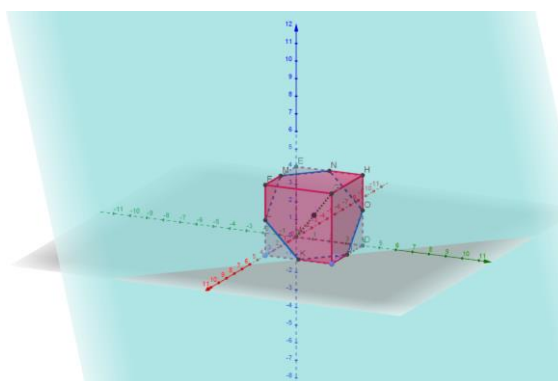
**Figura 8**

*Representação da resolução feita pela aluna no GGB, com o desenho do plano perpendicular à diagonal espacial e da secção de corte, que corresponde a um triângulo equilátero (pois todas as suas arestas correspondem a diagonais faciais do cubo).*



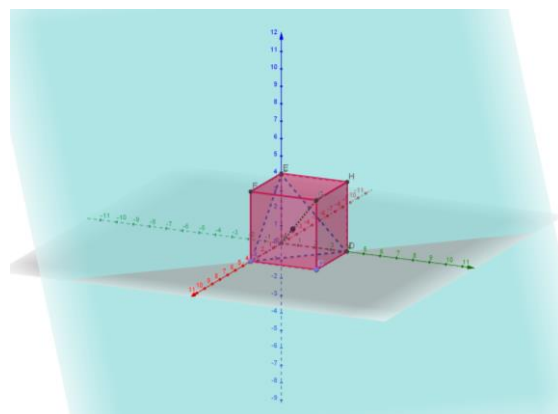
**Figura 9**

*Representação da resolução feita pela aluna no GGB, com o desenho do plano perpendicular à diagonal espacial, e da sua movimentação, obtendo-se na secção de corte um hexágono, quando estamos no ponto médio da diagonal espacial.*



**Figura 10**

*Representação da resolução feita pela aluna no GGB, com o desenho do plano perpendicular à diagonal espacial, após o ponto médio da diagonal espacial, onde a secção de corte volta a ser um triângulo equilátero.*



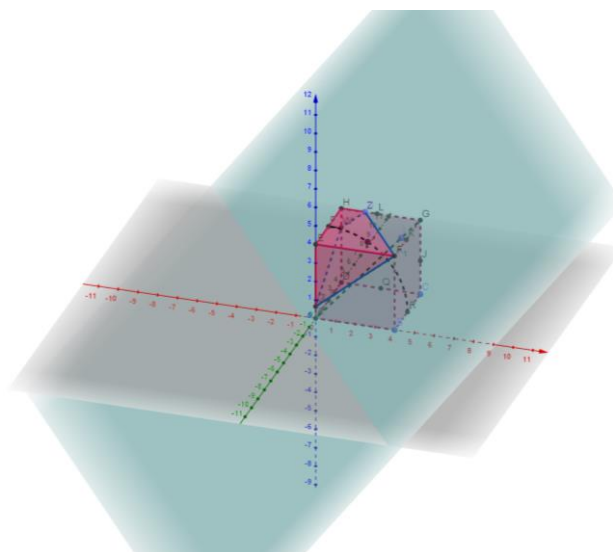
Quando movemos o ponto ao longo da diagonal espacial, temos dois tipos de polígono possíveis: triângulo e hexágono, sendo que o triângulo é sempre equilátero. Quando partimos do ponto de interseção do ponto da diagonal com um vértice do cubo, e o começamos a deslocar o ponto da diagonal espacial, vamos obter um triângulo, até que os lados deste triângulo correspondam às diagonais de três faces do cubo. Continuando a deslocar o ponto, vamos obter um hexágono. Este varia a sua forma, sendo regular quando os seus vértices correspondem ao ponto médio de cada aresta do cubo. Continuando a descer pela diagonal, esse hexágono vai-se transformar de novo num triângulo, que tem os seus lados em três faces no cubo (diferentes da do triângulo anterior).

Alarga a investigação a outras situações e investiga os diferentes tipos de polígonos que podemos obter.

Fazendo um arco dentro do cubo, com um ponto livre nesse arco, podemos traçar um plano que inclua esse ponto, podendo movimentá-lo no arco. Vamos obter um quadrilátero e diferentes tipos de triângulos (Figura 11).

**Figura 11**

*Representação da resolução feita pela aluna no GGB, relativa à exploração de secções de corte formadas por planos, num cubo. Aqui, verifica-se o aparecimento de um quadrilátero.*



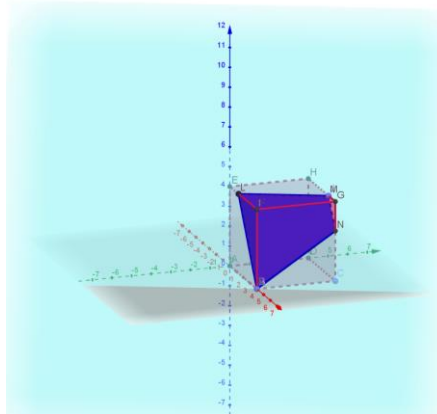
Colocando dois pontos aleatórios e um vértice do cubo, obtemos um plano. Com esse plano, vamos verificar as secções de corte que este forma no cubo.

Conseguimos então obter um paralelogramo (figura 12), um trapézio (figura 13), um triângulo isósceles (figura 14), um triângulo equilátero (figura 15).

Obtemos ainda um triângulo isósceles, quando um dos seus vértices corresponde ao ponto médio de uma das arestas do cubo (figura 16).

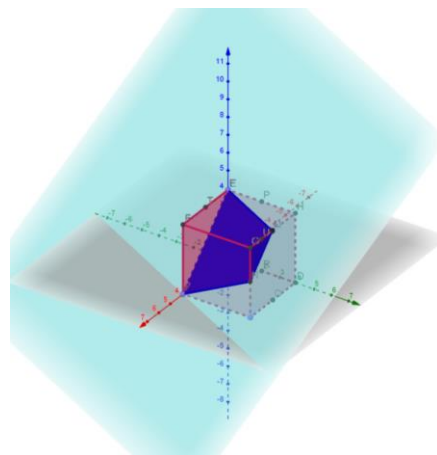
**Figura 12**

*Representação da resolução feita pela aluna no GGB, com o desenho da secção de corte de um plano “aleatório”, obtendo-se um paralelogramo.*



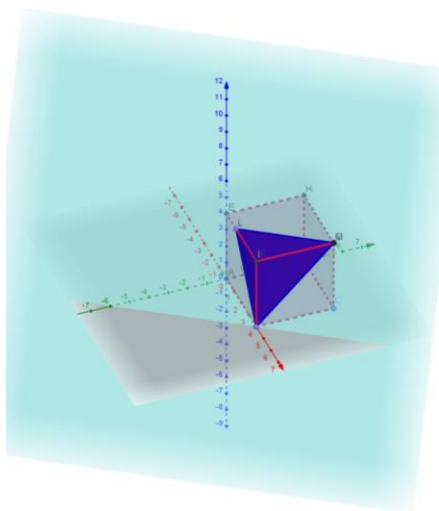
**Figura 13**

*Representação da resolução feita pela aluna no GGB, com o desenho da secção de corte de um plano “aleatório”, obtendo-se um trapézio.*



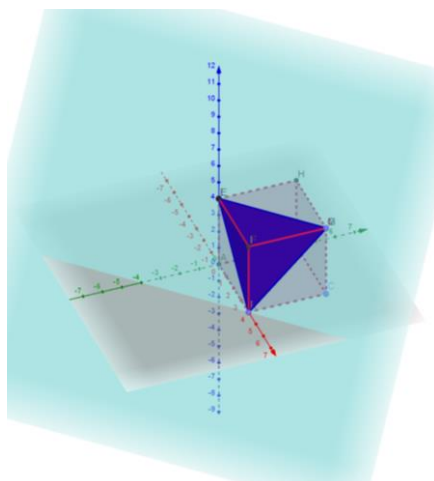
**Figura 14**

*Representação da resolução feita pela aluna no GGB, com o desenho da secção de corte de um plano “aleatório”, obtendo-se um triângulo isósceles.*



**Figura 15**

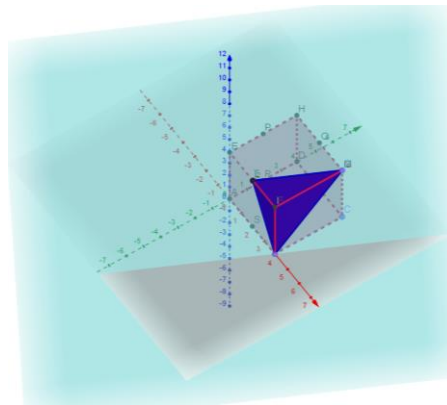
*Representação da resolução feita pela aluna no GGB, com o desenho da secção de corte de um plano “aleatório”, obtendo-se um triângulo equilátero, pois todos os lados correspondem a diagonais faciais do cubo.*





**Figura 16**

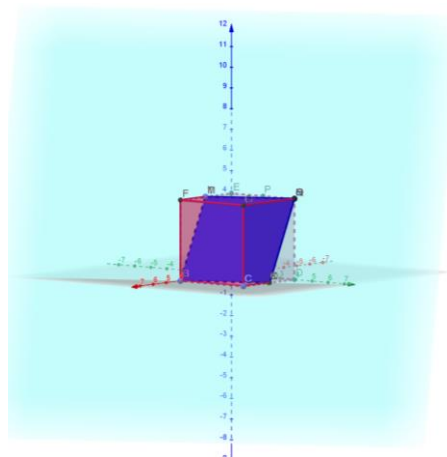
*Representação da resolução feita pela aluna no GGB, com o desenho da secção de corte de um plano “aleatório”, obtendo-se um outro triângulo isósceles.*



Se fixarmos o ponto médio de uma aresta do cubo e um dos vértices do cubo, e movendo o outro ponto ao longo das arestas do cubo - obtemos um paralelogramo: especial, pois é um losango (figura 17).

**Figura 17**

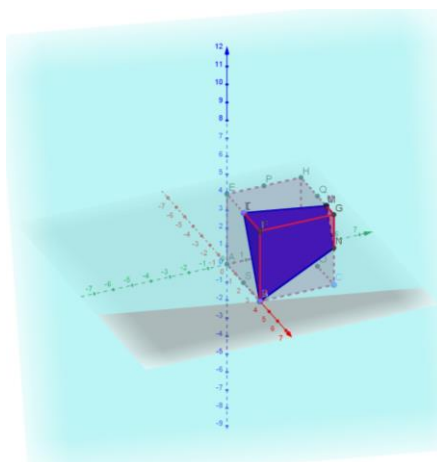
*Representação da resolução feita pela aluna no GGB, com o desenho da secção de corte de um plano com dois pontos fixos, obtendo-se um losango.*



Se fizermos um ponto a  $\frac{1}{4}$  da aresta, obtemos um trapézio (figura 18).

**Figura 18**

*Representação da resolução feita pela aluna no GGB, com o desenho da secção de corte de um plano com um ponto fixo a  $\frac{1}{4}$  da aresta do cubo, obtendo-se um trapézio.*

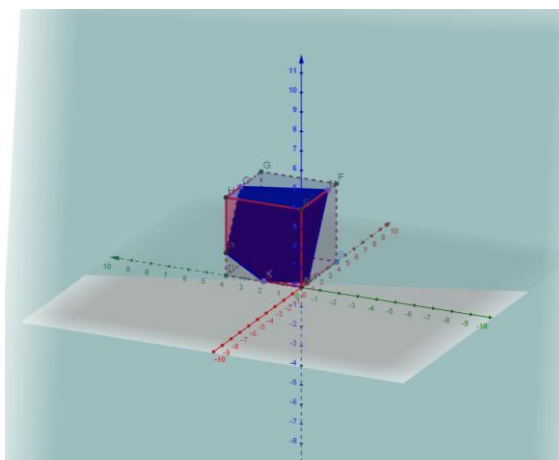


Todos os exemplos anteriores, tinham como condição um dos pontos que definia o plano ser um vértice do cubo.

Na próxima experiência, defini um plano com três pontos aleatórios, em três arestas do cubo. Na primeira situação obtive um pentágono (figura 19) e na segunda um paralelogramo (figura 20).

**Figura19**

*Representação da resolução feita pela aluna no GGB, com o desenho de um plano formado por três pontos aleatórios, sendo a secção de corte um pentágono.*



**Figura 20**

*Representação da resolução feita pela aluna no GGB, com o desenho de um plano formado por três pontos aleatórios, sendo a secção de corte um paralelogramo.*

