4. Umkehrfunktion

DEFINITION

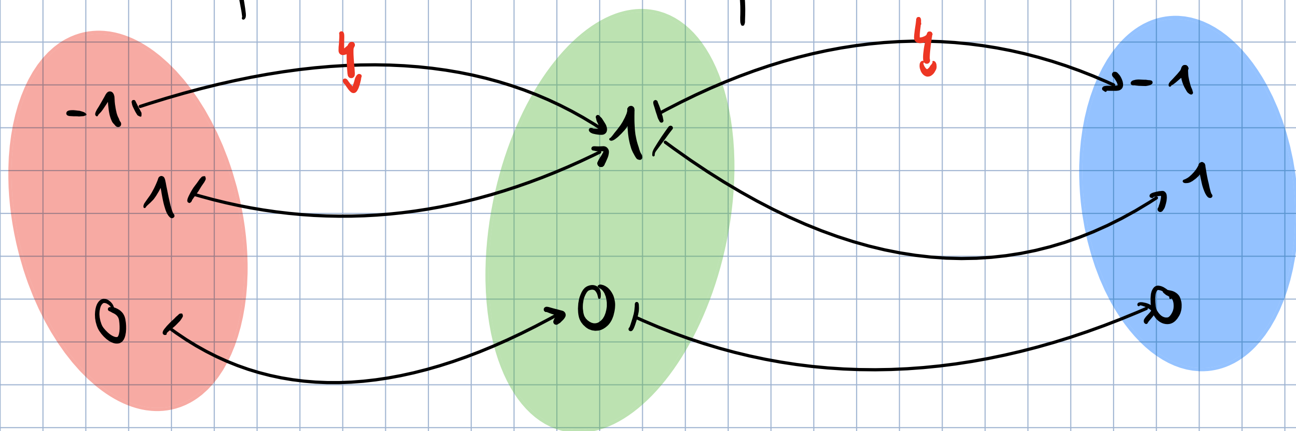
Gegeben sei eine Funktion $f: x \longmapsto f(x)$ mit $x \in D_f$.
Dann bezeichnen wir die Funktion f^{-1} als Umkehrfunktion zur Funktion f, wenn

$$f^{-1} \circ f : x \longmapsto x \text{ gilt.}$$

Die Verkettung der Funktionen f und f^{-1} ordnet somit jedem Wert x denselben Wert zu, weshalb folgt: $\quad f^{-1} : f(x) \longmapsto x$

Als Beispiel betrachten wir $f: x \longmapsto x^2$ im Mengendiagramm:

$f : x \longmapsto x^2 \qquad\qquad f^{-1} : x \longmapsto \sqrt{x}$



PROBLEM: Die Funktion f^{-1} würde dem Wert 1 zwei Werte zuordnen, nämlich $f^{-1}(1) = \pm 1$ womit f^{-1} keine Funktion wäre!

AUSWEG: Wir beschränken D_f so, dass jeder Funktionswert $f(x)$ nur durch Abbildung von maximal einem Wert $x \in D_f$ erreicht wird.
Dies ist immer gegeben, wenn f auf dem Intervall I streng monoton ist.

MERKE (Kriterium für Umkehrbarkeit)

f ist streng monoton $\Rightarrow$ f ist umkehrbar

Insbesondere ist jede differenzierbare Funktion f auf einem Intervall I umkehrbar wenn dort

$f'(x) < 0$ oder $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$ gilt.

Rechnerisch erhält man eine Umkehrfunktion durch Vertauschen von x und y mit anschließenden Auflösen nach y.

Graphisch entspricht die Umkehrfunktion einen Spiegeln an der Geraden $y = x$.