# S1 : Probabilités conditionnelles.

## I/ Rappel sur les probabilités.

*Expérience aléatoire :*
Expérience dont l'ensemble des résultats possibles est connu à l'avance, mais dont le résultat final est déterminé uniquement par le hasard. Par exemple, lorsque l'on lance une pièce, on sait que l'on peut obtenir face ou pile. Cependant on ne sait pas quel sera le résultat du lancer.

***Variable aléatoire :*** Nombre associé au résultat d'une expérience aléatoire. Elle permet en général de comptabiliser un évènement, ou de recenser les gains possibles dans un jeu. Par exemple si l'on lance une pièce 5 fois en l'air, on peut comptabiliser le nombre de face obtenus, ce nombre sera une variable aléatoire pouvant prendre les valeurs de 0 à 5, puisqu'en lançant cinq fois la pièce on peut obtenir entre 0 et 5 face.

***Probabilité :***
Quelque soit le contexte, une probabilité est toujours définie par le rapport suivant :

$$P = \frac{Nombres\ de\ résultats\ favorables}{Nombre\ de\ résultats\ possibles}$$

***Univers :***
C'est l'ensemble des résultats possibles d'une expérience. Sa probabilité est toujours égale à 1, puisque le nombre de résultats favorables est égal au nombre de résultats possibles.

***Evènement :***
C'est un résultat attendu de l'expérience aléatoire. Par exemple lors du tirage d'une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes, on peut définir l'évènement C : tirer un cœur. On nommera souvent les évènements avec des lettres et nous noterons leur probabilité de la manière suivante $P_{(C)}$.
Dans notre exemple :

$$P_{(C)} = \frac{Nombre\ de\ coeurs\ dans\ le\ jeu}{Nombre\ total\ de\ cartes\ dans\ le\ jeu} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

***Evènement contraire :***
C'est l'inverse d'un évènement et il se note avec une barre au-dessus de la lettre de l'évènement. Par exemple si C est l'évènement tirer un cœur, alors $\bar{C}$ sera l'évènement ne pas tirer de cœur. Sa probabilité est :

$$P_{(\bar{C})} = 1 - P_{(C)}$$

Calculer des probabilités, c'est donc simplement trouver des méthodes pour dénombrer les différents cas possibles et les différents cas favorables. Pour cela les deux principaux outils à notre disposition sont les tableaux et les arbres.

***Notations :***
Soient deux évènements A et B, on notera :
- $P(A \cap B)$: la probabilité d'obtenir A et B en même temps.
- $P_A(B)$ : La probabilité d'obtenir B si A est déjà réalisé.
- $P(A \cup B)$ : La probabilité de réaliser A ou B.

**Exemple :**
Une urne contient 6 jetons indiscernables au toucher répartis de la manière suivante : 2 jetons de chaque couleur (Bleu, Rouge et Vert). Pour chaque couleur, l'un des jetons porte le numéro 1 et l'autre le numéro 2. On définit les évènements suivants :
B : On pioche un jeton bleu
R : On pioche un jeton rouge
V : On pioche un jeton vert
1 : Le jeton pioché porte le numéro 1
2 : Le jeton pioché porte le numéro 2
On pioche un jeton dans l'urne.

Donc l'évènement piocher un jeton bleu et portant le n°1 se note B∩1 et sa probabilité se note P(B∩1). L'évènement obtenir un jeton bleu *ou* un jeton portant le numéro 1 se note B∪1 et sa probabilité se note P(B∪1)

## II/ Tableau de probabilités, construction et lecture.

Calculer des probabilités c'est donc simplement compter le nombre de résultats possibles et le nombre de résultats correspondant à l'évènement. Pour cela on peut représenter les données disponibles sous forme de tableau, lorsque l'on s'intéresse à deux caractères en même temps dans une population.

***Exemple :***
Pour construire un tel tableau à partir d'un texte, il faudra identifier les différents caractères étudiés. Ensuite construire le tableau et enfin mettre les valeurs dans les bonnes cases.

En 2019 le nombre total d'inscrits au brevet des collèges était de 739 133.
Parmi eux il y avait 365 684 garçons et 317 779 d'entre eux ont été admis. Parmi les filles 346 187 ont obtenu leur brevet.

| | **(A) Admis** | **(R) Refusés** | **Total** |
|---|---|---|---|
| **(G) Garçons** | 317 779 | 47 905 | 365 684 |
| **(F) Filles** | 346 187 | 27 262 | 373 449 |
| **Total** | 663 966 | 75 167 | 739 133 |

La colonne et la ligne total sont nommées marges du tableau. Nous avons donc ici à faire à un tableau d'effectif marginal. Dans lequel nous pouvons par exemple lire que 317 779 personnes sont des garçons admis au brevet.

A partir de ce tableau nous pouvons faire un tableau de probabilités. Ou tableau des fréquences marginales. Pour cela on divise l'effectif de chaque case par l'effectif total.

| | **A** | **R** | **Total** |
|---|---|---|---|
| **G** | **0,4299** | 0,0648 | 0,4947 |
| **F** | 0,4684 | 0,0369 | 0,5053 |
| **Total** | 0,8983 | 0,1017 | 1 |

Pour obtenir la probabilité qu'un garçon soit admis au brevet il faut donc faire le calcul suivant : $\frac{317\,779}{739\,133}$

On pourra donc dire que **P(A∩G) = 0,4299**

On peut aussi réaliser le tableau des fréquences conditionnelles. Celui-ci nous présente les probabilités d'être admis si on connait le sexe du candidat.

| | **A** | **R** | **Total** |
|---|---|---|---|
| **G** | ***0,8690*** | 0,1310 | 1 |
| **F** | 0,9270 | 0,0730 | 1 |

Pour calculer la probabilité d'être admis sachant que le candidat est un garçon, on divise le nombre de garçons admis par le nombre de garçons.

$$P_G(A) = \frac{317\,779}{365\,684}$$

Il faudra faire attention à ne pas confondre les tableaux. Le second donne les probabilités d'un évènement en considérant tous les candidats. Alors que le troisième donne les probabilités d'un évènement en ne considérant que les garçons pour la première ligne et que les filles pour la seconde.

***Calcul de P(A U B) :***
Pour deux évènements A et B on se rappellera que P(A U B) = P(A) + P(B) – P(A ∩ B)

***Application à l'exemple :***

| | **A** | **R** | **Total** |
|---|---|---|---|
| **G** | 0,4299 | 0,0648 | 0,4947 |
| **F** | 0,4684 | 0,0369 | 0,5053 |
| **Total** | 0,8983 | 0,1017 | 1 |

Pour obtenir P(G U A), qui est la probabilité d'avoir un candidat garçon ou un(e) candidat(e) admis(e) on doit donc faire :
P(G U A) = P(A) + P(G) – **P(G ∩ A)** = 0,9631

On peut comprendre cette formule en voyant que lorsque l'on additionne P(A) et P(G) on prend bien en compte tous les candidats étant soit admis soit des garçons. Cependant en faisant cela les garçons admis sont comptés deux fois. Donc il faut les enlever une fois.