Problemas – Tema 8

Problemas resueltos - 7 - punto frontera y discontinuidades

1. Estudia la continuidad de la función en $x=3$ **.**

$$f(x)=\begin{cases} -2x+8 & si \quad x\leq 3 \\ 3x-7 & si \quad x>3 \end{cases}$$

Primera condición: la función debe existir en el punto frontera.

$$\exists f(3)=-2\cdot 3+8=2$$

Segunda condición: límites laterales finitos e iguales.

$$L^{-}=\lim_{x\to 3^{-}}(-2x+8)=evaluar=-2(3)+8=2$$

$$L^{+}=\lim_{x\to 3^{+}}(3x-7)=evaluar=3(3)-7=2$$

$$\lim_{x\to 3^{-}}f(x)=\lim_{x\to 3^{+}}f(x)=2=L$$

Tercera condición: la función evaluada en el punto coincide con el límite.

$$f(3)=L=2$$

La función es continua en $x=3$

2. Estudia la continuidad de la función en $x=2$ **.**

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & si \quad x\neq 2 \\ 3 \quad si \quad x=2 \end{cases}$$

Ojo con la forma en que está expresa esta función a trozos. Tanto a la izquierda como a la derecha de 2, la ecuación de la función es el cociente de polinomios. Y solo cuando la variable x vale 2, la ecuación de la función es la recta horizontal $f(x)=2$.

Primera condición: existe la función en el punto frontera.

$$\exists f(2)=3$$

Segunda condición: límites laterales iguales.

Dada la forma en que está definida la función a trozos, la expresión del límite por la izquierda va a coincidir con la expresión del límite por la derecha, ya que ambos límites se aplican sobre la misma ecuación para la función: $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$.

Empecemos por el límite lateral izquierdo.

$L^-=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\dfrac{0}{0}$ → Indeterminación → Factorizar y simplificar.

Recuerda que ya hemos estudiado las técnicas para resolver indeterminaciones 0/0 (ver capítulos anteriores).

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}(x+2)=volver\ a\ evaluar=4 \quad \rightarrow \quad L^-=4$$

Si hacemos el límite lateral derecho, llegaremos al mismo resultado → $L^+=4$

En consecuencia:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=4=L$$

Si comparamos el valor de la función en el punto frontera con el valor del límite, comprobamos que no coinciden.

$$f(2)=3\neq 4=L$$

Estamos ante una discontinuidad evitable en $x=2$.

3. Sea $f(x)=\frac{x^2-7x+10}{x^2-4x-5}$ **.**

Estudia la continuidad en $x=-1$ **y en** $x=5$ **.**

Calcula $\lim_{x\to\infty} f(x)$ **.**

Estudiemos la continuidad de la función en $x=-1$.

$$\nexists f(-1)$$

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2-7x+10}{x^2-4x-5}=\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2-7x+10}{(x+1)(x-5)}=\frac{18}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2-7x+10}{x^2-4x-5}=\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2-7x+10}{(x+1)(x-5)}=\frac{18}{0^-}=-\infty$$

Discontinuidad no evitable de primera especie de salto infinito en $x=-1$.

Estudiemos la continuidad de la función en $x=5$.

$$\nexists f(5)$$

$$\lim_{x\to 5^-}\frac{x^2-7x+10}{x^2-4x-5}=\lim_{x\to 5^-}\frac{(x-2)(x-5)}{(x+1)(x-5)}=\lim_{x\to 5^-}\frac{x-2}{x+1}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 5^+}\frac{x^2-7x+10}{x^2-4x-5}=\frac{1}{2}$$

Discontinuidad evitable en $x=5$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=1$$

Ya que tenemos un cociente de polinomios de grado dos, donde los coeficientes que acompañan a x^2 en el numerador y en el denominador es 1 . Por lo que el límite coincide con el cociente de coeficientes que acompañan a la máxima potencia.

4. Indica el valor de k para que la función sea continua en $x=\frac{1}{2}$.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{3x}{2x-2} & si \quad x\neq\frac{1}{2} \\ k \quad si \quad x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Primera condición: existe la función en el punto frontera.

$$\exists f\left(\frac{1}{2}\right)=k$$

Segunda condición: límites laterales iguales.

$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-}\frac{3x}{2x-2}=evaluar=\frac{-3}{2} \quad \to \quad L^-=\frac{-3}{2}$$

Por la forma de la función a trozos, la expresión del límite lateral derecho coincide con la expresión del límite lateral izquierdo.

$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+}\frac{3x}{2x-2}=evaluar=\frac{-3}{2} \quad \to \quad L^+=\frac{-3}{2}$$

$$L^-=L^+=L=\frac{-3}{2}$$

Según la tercera condición, el valor de la función en el punto debe coincidir con el valor del límite.

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=k \quad , \quad L=\frac{-3}{2} \quad \to \quad f\left(\frac{1}{2}\right)=L \quad \to \quad k=\frac{-3}{2}$$