Teoría – Tema 2

Teoría - 3 - definición métrica o formal de límite

Límite finito en un punto

Sea $f(x): I \rightarrow \mathbb{R}$ una función de variable real x .

Diremos que $f(x)$ tiene límite $L \in \mathbb{R}$ en el punto $x_0 \in I$ si la función $f(x)$ se puede acercar todo lo que queramos al valor límite L cuando x se acerca suficientemente a x_0 .

¿Cómo expresar esta definición de manera analítica?

Diremos que $f(x)$ tiene límite $L \in \mathbb{R}$ en el punto $x_0 \in I$ si, y solo si, se cumple:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / x \in E^*(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ y se denota:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

En otras palabras, $f(x)$ tiene límite $L \in \mathbb{R}$ en el punto $x_0 \in I$ si, y solo si, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

A esta definición la llamaremos **definición métrica o formal** de límite finito en un punto.

Ejemplo 1 resuelto

Demostrar, mediante la definición métrica de límite, $\lim_{x \rightarrow 3} (2x-5) = 1$.

Partimos de la definición métrica, considerando $x_0 = 3$ y $L = 1$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / |x-3| < \delta \Rightarrow |(2x-5)-1| < \varepsilon \rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / |x-3| < \delta \Rightarrow |2x-6| < \varepsilon$$

¿Qué debemos demostrar?

Lo siguiente: partiendo de un $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño y de la desigualdad $|2x-6| < \varepsilon$, debemos operar hasta conseguir la desigualdad $|x-3| < \delta$ para un $\delta > 0$ arbitrariamente pequeño (tan pequeño como yo quiera).

$\varepsilon > 0$, $|2x-6| < \varepsilon \rightarrow |2(x-3)| < \varepsilon \rightarrow 2|x-3| < \varepsilon \rightarrow |x-3| < \frac{\varepsilon}{2}$ → Llamamos $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, de tal forma que si $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se cumplirá que $\delta > 0$ también es arbitrario. Y por lo tanto se cumplirá $|x-3| < \delta$ → Como queríamos demostrar (c.q.d.).

Ejemplo 2 resuelto

Demostrar, mediante la definición métrica de límite, $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$ **.**

Partimos de la definición métrica, considerando $x_0=1$ y $L=\frac{1}{2}$:

$$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 / |x-1|<\delta \Rightarrow |(\frac{1}{x+1})-\frac{1}{2}|<\varepsilon \quad \rightarrow \quad \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 / |x-1|<\delta \Rightarrow |\frac{1-x}{2(x+1)}|<\varepsilon$$

¿Qué debemos demostrar?

Lo siguiente: partiendo de un $\varepsilon>0$ arbitrario y de la desigualdad $|\frac{1-x}{2(x+1)}|<\varepsilon$, debemos operar hasta conseguir la desigualdad $|x-1|<\delta$ para un $\delta>0$ arbitrario.

$$\varepsilon>0 \quad , \quad |\frac{1-x}{2(x+1)}|<\varepsilon \quad \rightarrow \quad |\frac{-(x-1)}{2(x+1)}|<\varepsilon \quad \rightarrow \quad |\frac{x-1}{2(x+1)}|<\varepsilon \quad \rightarrow \quad |x-1|<2\varepsilon|x+1|$$

Llegados a este punto no podemos igualar $\delta=2\varepsilon|x+1|$ porque δ dependería de la variable x y no sería un valor arbitrario. Pero sí podemos acotar superiormente el valor δ , ya que necesitamos que arbitrariamente pequeño (“tan pequeño como yo quiera”), por lo que somos libres de acotarlo superiormente.

$\delta<0{,}5 \rightarrow$ Si $x_0=1 \rightarrow x\in(1-0{,}5\,,\,1+0{,}5) \rightarrow x\in(0{,}5\,,\;1{,}5) \rightarrow |x+1|\leq(1{,}5+1) \rightarrow$
$|x+1|<2{,}5 \rightarrow 2|x+1|<2\cdot 2{,}5 \rightarrow 2|x+1|<5 \rightarrow 2\varepsilon|x+1|<5\varepsilon$

Ahora sí igualamos:

$\delta=5\varepsilon \rightarrow 2\varepsilon|x+1|<\delta \rightarrow |x-1|<\delta \rightarrow$ Como queríamos demostrar (c.q.d.).

Límite infinito en un punto (asíntota vertical)

$f(x): I \rightarrow \mathbb{R}$ tiene límite infinito (∞) en el punto $x_0 \in I$ si y solo si:

$\forall k > 0, \exists \delta > 0 / |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > k$. Y se denota:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

Con otras palabras: siempre encuentro un valor de la función $f(x)$ mayor que cualquier valor real k positivo si elijo un entorno suficientemente pequeño alrededor de x_0 .

$f(x)$ tiene límite menos infinito ($-\infty$) en el punto $x_0 \in I$ si, y solo si:

$\forall k < 0, \exists \delta > 0 / |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < k$. Y se denota:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

Con otras palabras, siempre encuentro un valor de la función $f(x)$ menor que cualquier valor real k negativo si elijo un entorno suficientemente pequeño alrededor de x_0 .

Ejemplo 3 resuelto

Demostrar, mediante la definición métrica de límite, $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ **.**

Partimos de la definición métrica, considerando $x_0 = 0$ y $+\infty$:

$$\forall k > 0, \exists \delta > 0 / |x - 0| < \delta \Rightarrow \frac{1}{x^2} > k \quad \rightarrow \quad \forall k > 0, \exists \delta > 0 / |x| < \delta \Rightarrow \frac{1}{x^2} > k$$

¿Qué debemos demostrar?

Partiendo de un $k > 0$ arbitrariamente grande y de la desigualdad $\frac{1}{x^2} > k$, debemos operar hasta obtener la desigualdad $|x| < \delta$.

$$k > 0 \quad , \quad \frac{1}{x^2} > k \quad \rightarrow \quad \frac{1}{k} > x^2 \quad (puedo \ \ hacer \ \ este \ \ paso \ \ porque \ \ k \ \ y \ \ x^2 \ \ son \ \ positivos)$$

$$\left|\frac{1}{k}\right| > |x^2| \quad \rightarrow \quad \frac{1}{k} > |x|^2 \quad \rightarrow \quad \sqrt{\frac{1}{k}} > |x| \quad \rightarrow \text{Si} \quad \delta = \sqrt{\frac{1}{k}} \quad \rightarrow \quad |x| < \delta$$

Como queríamos demostrar (c.q.d.).

Ejemplo 4 resuelto

Demostrar, mediante la definición métrica de límite, $\lim_{x\to 1} \frac{-1}{x-1} = -\infty$ **.**

Partimos de la definición métrica, considerando $x_0 = 1$ y $-\infty$:

$$\forall k<0, \exists \delta>0 / |x-1|<\delta \Rightarrow \frac{-1}{x-1}<k$$

¿Qué debemos demostrar?

Partiendo de un $k<0$ arbitrariamente negativo y de la desigualdad $\frac{-1}{x-1}<k$, debemos operar hasta obtener la desigualdad $|x-1|<\delta$.

$$k<0 \quad , \quad \frac{-1}{x-1}<k \quad \rightarrow \quad \left|\frac{-1}{x-1}\right|>|k| \quad (cambia \quad desigualdad \quad porque \quad k<0 \rightarrow |k|>0)$$

$$\frac{1}{|x-1|}>|k| \quad \rightarrow \quad 1>|k|\cdot|x-1| \quad \rightarrow \quad \frac{1}{|k|}>|x-1| \quad \rightarrow \text{Si} \quad \delta=\frac{1}{|k|} \quad \rightarrow \quad |x-1|<\delta$$

Como queríamos demostrar (c.q.d.).

Límite finito en el infinito (asíntota horizontal)

$f(x): I \to \mathbb{R}$ tiene límite finito $L \in \mathbb{R}$ en el infinito si y solo si:

$\forall\ k>0, \exists\, \varepsilon>0 / x>k \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$. Y se denota:

$\lim_{x \to \infty} f(x)=L$

Con otras palabras, la función $f(x)$ se acerca tanto como queramos al límite L con tal de tomar un valor real k suficientemente grande.

$f(x): I \to \mathbb{R}$ tiene límite finito $L \in \mathbb{R}$ en menos infinito si, y solo si:

$\forall\, k<0, \exists\, \varepsilon>0 / x<k \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$. Y se denota:

$\lim_{x \to -\infty} f(x)=L$

Con otras palabras, la función $f(x)$ se acerca tanto como queramos al límite L con tal de tomar un valor real k suficientemente negativo.

Ejemplo 5 resuelto

Demostrar, mediante la definición métrica de límite, $\lim_{x \to \infty} \frac{x+1}{x}=1$ **.**

Partimos de la definición métrica, considerando $+\infty$ y $L=1$:

$\forall\, k>0, \exists\, \varepsilon>0 / x>k \Rightarrow \left|\frac{x+1}{x}-1\right|<\varepsilon \;\; \to \;\; \forall\, k>0, \exists\, \varepsilon>0 / x>k \Rightarrow \left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$

¿Qué debemos demostrar?

Partiendo de un $k>0$ arbitrariamente grande y de la desigualdad $\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$, debemos operar hasta obtener la desigualdad $x>k$.

$k>0$, $\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon \;\to\; \frac{1}{\varepsilon}<|x| \;\to\; \frac{1}{\varepsilon}<x\,(si\;\; x\to\infty, |x|=x) \;\to$ Si $\frac{1}{\varepsilon}=k \;\to\; x>k$

Como queríamos demostrar (c.q.d.).

Ejemplo 6 resuelto

Demostrar, mediante la definición métrica de límite, $\lim_{x\to-\infty}\frac{1-x}{x}=-1$ **.**

Partimos de la definición métrica, considerando $-\infty$ y $L=-1$:

$$\forall k<0, \exists \varepsilon>0 / x<k \Rightarrow \left|\frac{1-x}{x}-(-1)\right|<\varepsilon \quad \rightarrow \quad \forall k<0, \exists \varepsilon>0 / x<k \Rightarrow \left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$$

¿Qué debemos demostrar?

Partiendo de un $k<0$ arbitrariamente negativo y de la desigualdad $\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$, debemos operar hasta obtener la desigualdad $x<k$.

$$k<0 \quad , \quad \left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\varepsilon}<|x| \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\varepsilon}<-x\,(si \quad x\rightarrow-\infty, |x|=-x) \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \frac{-1}{\varepsilon}>x\,(\ cambia \quad sentido \quad desigualdad) \rightarrow \text{Si} \quad k=\frac{-1}{\varepsilon} \quad \rightarrow \quad x<k$$

Como queríamos demostrar (c.q.d.).

Límite infinito en el infinito

$f(x): I \to \mathbb{R}$ tiene límite infinito (∞) en el infinito si, y solo si:

$\forall\ k>0, \exists m>0 / x>k \Rightarrow f(x)>m$. Y se denota:

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

Con otras palabras, la función $f(x)$ siempre es mayor que cualquier valor real m positivo con tal de elegir un valor real x suficientemente grande.

$f(x): I \to \mathbb{R}$ tiene límite menos infinito ($-\infty$) en el infinito si, y solo si:

$\forall\ k>0, \exists m<0 / x>k \Rightarrow f(x)<m$. Y se denota:

$\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$

Con otras palabras, la función $f(x)$ siempre es menor que cualquier valor real m negativo con tal de elegir un valor real x suficientemente grande.

$f(x): I \to \mathbb{R}$ tiene límite infinito (∞) en menos infinito si, y solo si:

$\forall\ k<0, \exists m>0 / x<k \Rightarrow f(x)>m$. Y se denota:

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$

Con otras palabras, la función $f(x)$ siempre es mayor que cualquier valor real m positivo con tal de elegir un valor real x suficientemente negativo.

$f(x): I \to \mathbb{R}$ tiene límite menos infinito ($-\infty$) en menos infinito si, y solo si:

$\forall\ k<0, \exists m<0 / x<k \Rightarrow f(x)<m$. Y se denota:

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

Con otras palabras, la función $f(x)$ siempre es menor que cualquier valor real m negativo con tal de elegir un valor real x suficientemente negativo.

Ejemplo 7 resuelto

Demostrar, mediante la definición métrica de límite, $\lim_{x\to\infty}(x+2)=\infty$ **.**

Partimos de la definición métrica:

$$\forall k>0, \exists m>0 / x>k \Rightarrow |\frac{x+1}{x}-1|<\varepsilon$$

¿Qué debemos demostrar?

Partiendo de un $k>0$ arbitrariamente grande y de la desigualdad $(x+2)>m$, debemos operar hasta obtener la desigualdad $x>k$.

$k>0$, $(x+2)>m$ $\rightarrow$ $x>m-2$ → Acotamos inferiormente $m>2$, ya que solo necesitamos que sea arbitrariamente positivo → Si $k=m-2>0$ $\rightarrow$ $x>k$ → Como queríamos demostrar (c.q.d.).

Ejemplo 8 resuelto

Demostrar, mediante la definición métrica de límite, $\lim_{x\to-\infty}(x+3)=-\infty$ **.**

Partimos de la definición métrica:

$$\forall k<0, \exists m<0 / x<k \Rightarrow (x+3)<m$$

¿Qué debemos demostrar?

Partiendo de un $k<0$ arbitrariamente negativo y de la desigualdad $(x+3)<m$, debemos operar hasta obtener la desigualdad $x<k$.

$k<0$, $(x+3)<m$ $\rightarrow$ $x<m-3$ → Acotamos superiormente $m<3$, ya que solo necesitamos que sea arbitrariamente negativo → Si $k=m-3<0$ $\rightarrow$ $x<k$ → Como queríamos demostrar (c.q.d.).

Asíntotas oblicuas

La definición formal de asíntota oblicua la vamos a reducir a la definición de límite finito en el infinito. Hablamos de asíntota oblicua cuando existe la función, en el infinito, tiende a una recta de pendiente $m \in \mathbb{R}$ y de ordenada en el origen $n \in \mathbb{R}$. Es decir:

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(mx+n)$ → Dividimos por x → $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}(m+\frac{n}{x})$ →

→ $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}(m) + \lim_{x\to\infty}(\frac{n}{x})$ → $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = m+0$ → $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = m$

Llegando a un límite finito en el infinito de la nueva función $\frac{f(x)}{x}$. Además:

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(mx+n)$ → $\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx) = \lim_{x\to\infty}(n)$ → $\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx) = n$

Llegando a un límite finito en el infinito de la nueva función $(f(x)-mx)$.

Ejemplo 9 resuelto

Demostrar, mediante la definición métrica de límite, que la función $\frac{x^2+1}{x}$ posee asíntota oblicua $y=x$.

Debemos estudiar el límite $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = m$ con $m=1$ → $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2} = 1$. Así:

$\forall k>0, \exists \varepsilon>0 / x>k \Rightarrow |\frac{x^2+1}{x^2}-1|<\varepsilon$ → $\forall k>0, \exists \varepsilon>0 / x>k \Rightarrow |\frac{1}{x^2}|<\varepsilon$

¿Qué debemos demostrar?

Partiendo de un $k>0$ arbitrariamente grande y de la desigualdad $|\frac{1}{x^2}|<\varepsilon$, debemos operar hasta obtener la desigualdad $x>k$.

$k>0$, $|\frac{1}{x^2}|<\varepsilon$ → $\frac{1}{\varepsilon}<|x^2|$ → $\frac{1}{\varepsilon}<x^2(debido\ a\ que\ |x^2|=x^2>0)$ →

→ $\pm\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}<x(si\ x\to\infty, x>0\ y\ la\ desigualdad\ se\ cumple)$ → Si $k=+\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$ → $x>k$

Como queríamos demostrar (c.q.d.).

Ya tenemos el valor de la pendiente de la asíntota oblicua: $m=1$. Necesitamos el valor de la ordenada en el origen.

Debemos estudiar el límite $\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=n$ con $m=1$ y $n=0$ → $\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2+1}{x}-x)=0$ → $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$. Así:

$$\forall k>0, \exists \varepsilon>0 / x>k \Rightarrow |\frac{1}{x}-0|<\varepsilon \quad \rightarrow \quad \forall k>0, \exists \varepsilon>0 / x>k \Rightarrow |\frac{1}{x^2}|<\varepsilon$$

¿Qué debemos demostrar?

Partiendo de un $k>0$ arbitrariamente grande y de la desigualdad $|\frac{1}{x}|<\varepsilon$, debemos operar hasta obtener la desigualdad $x>k$.

$$k>0 \ , \ |\frac{1}{x}|<\varepsilon \ \rightarrow \ \frac{1}{\varepsilon}<|x| \ \rightarrow \ \frac{1}{\varepsilon}<x\,(si\, x\rightarrow\infty, x>0 \ \ y \ \ la \ \ desigualdad \ \ se \ \ cumple) \ \rightarrow$$

→ Si $k=\frac{1}{\varepsilon}$ → $x>k$ → Como queríamos demostrar (c.q.d.).