FIGURAS SEMEJANTES

Son figuras son semejantes si tienen la misma forma, pero distinto tamaño. Una figura es semejante a otra si has multiplicado a todos y cada uno de los lados de la primera por el mismo número (razón de semejanza) para obtener la segunda.

La **razón de semejanza es la razón de proporcionalidad**: es el número por el que multiplicas a un segmento para que te dé otro semejante.

Al igual que has visto con las fracciones (que dos de ellas eran equivalentes cuando al multiplicar sus términos cruzados daban el mismo resultado: *producto de medios igual a producto de extremos*)[1], con las figuras geométricas y con todos los objetos en general existen semejanzas. Por ejemplo al hacer una fotocopia ampliada de un dibujo obtendremos un dibujo que se parece mucho al original pero con dimensiones más grandes.

Ocurre lo mismo si, por ejemplo, vas a París y de recuerdo compras una figurita de la Torre Eiffel: la torre de verdad y tu figurita son semejantes.

Los planos y los mapas reflejan la realidad *a escala*: la escala es el cociente entre cada longitud de la reproducción (mapa, plano, maqueta) y la correspondiente longitud en la realidad. **La escala** es, por tanto, la razón de semejanza entre la reproducción y la realidad.

Por ejemplo, una escala 1:300 significa que 1 cm del plano corresponde a 300 cm (3 metros) de la realidad. La expresión 1:300 también puede escribirse como $\frac{1}{300}$, que es *la razón de semejanza*.

Si la razón de semejanza entre dos figuras es k, entonces:

- La razón de semejanza entre las áreas de dos figuras semejantes es k^2.
- La razón de semejanza entre los volúmenes de dos figuras semejantes es k^3.

Una escala o una razón de semejanza no tienen *NUNCA* unidades.

TRIÁNGULOS SEMEJANTES

Dos triángulos semejantes son aquellos que tienen los ángulos iguales y los lados proporcionales.

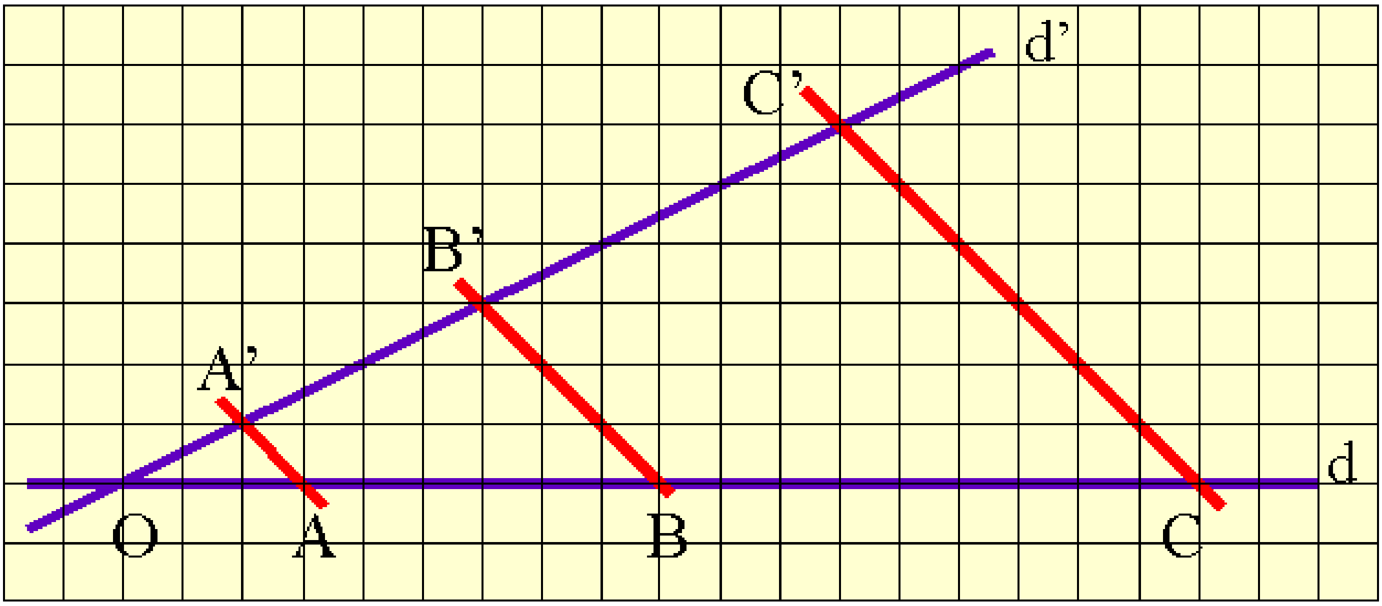
Para saber si dos triángulos son semejantes, han de verificar uno de los tres siguientes criterios:

1. Tener los tres lados proporcionales
2. Tener dos ángulos iguales (con lo que también tienen el tercero igual)
3. Tener dos lados proporcionales y el ángulo que forman coincide.

[1] Dadas las longitudes de tres segmentos *a*, *b* y *c*, llamamos cuarto proporcional de ellos a la longitud del segmento *d* que verifica: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

TEOREMA DE TALES

Tales (624 – 548 a.C.) fue un filósofo griego que nació en Mileto y fue maestro de Pitágoras. En su juventud visitó Egipto, y sorprendido por las dimensiones de las pirámides en Guiza, quiso saber cuál era su altura, y acabó elaborando su teorema:



TEOREMA DE TALES

Si dos rectas secantes son cortadas por varias rectas paralelas, los segmentos correspondientes determinados sobre las rectas secantes son proporcionales.

Considera dos rectas d y d' secantes en O. Consideramos tres puntos cualesquiera A, B y C sobre d y trazamos por ellos rectas paralelas que corten a d' en A', B' y C'.

OA	AB	BC
OA'	A'B'	B'C'

es un tabla de proporcionalidad directa, en consecuencia →

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

"Dos rectas secantes cortadas por paralelas dan lugar a segmentos proporcionales"

Las siguientes proporciones también son ciertas:

$$\frac{AA'}{OA} = \frac{BB'}{OB} = \frac{CC'}{OC}$$

y además

$$\frac{AA'}{OA'} = \frac{BB'}{OB'} = \frac{CC'}{OC'}$$

Dos triángulos están en posición de Tales si tienen un ángulo común y los lados opuestos a ese vértice son paralelos.

Dos triángulos en posición de Tales son semejantes, y dos triángulos semejantes siempre pueden colocarse en posición de Tales.

EJERCICIOS DE SEMEJANZA, TALES Y ESCALAS

1. Si tenemos dos triángulos, con un ángulo igual, y en el primero los lados que lo forman miden 15 y 20 cm, respectivamente; y en el segundo, los lados que lo forman miden 45 cm y 60 cm, respectivamente, ¿son dos triángulos semejantes?

2. Las dimensiones de una fotografía son 6,5 cm. por 2,5 cm. Se quiere ampliar de manera que el lado mayor mida 26 cm. ¿Cuánto medirá el lado menor?

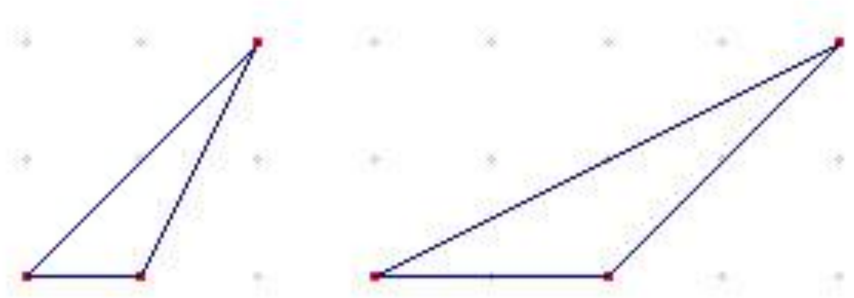
3. Se desea hacer un plano de un terreno de 100m de largo por 300m de ancho usando una escala de 1:500 ¿Cuáles serán las dimensiones del dibujo del terreno?

4. Chile es un país largo y angosto, y por consiguiente, su mapa también lo es. Si consideramos que desde Arica en el norte hasta Magallanes en el sur hay, aproximadamente, 4.000 kilómetros. ¿Qué largo tendría el mapa de Chile si se dibujara un centímetro por cada kilómetro?

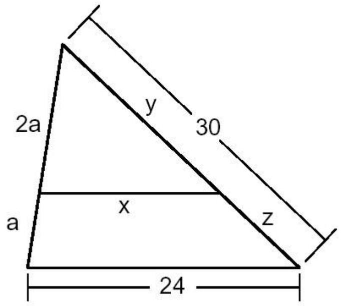
5. Los catetos de un triángulo rectángulo que miden 24 m y 10 m. ¿Cuánto medirán los catetos de un triángulo semejante al primero cuya hipotenusa mide 52 m?

6. Dos triángulos rectángulos tienen un ángulo agudo de 35°. ¿Son semejantes?

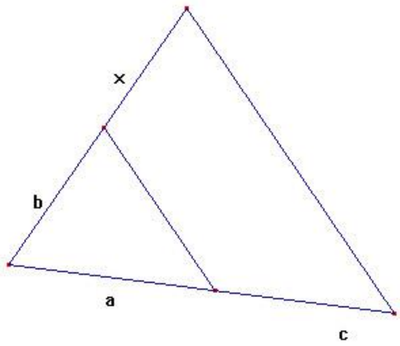
7. ¿Son semejantes las figuras siguientes?



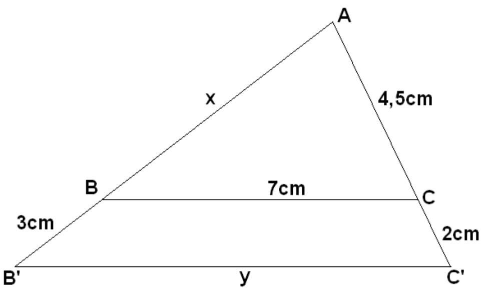
8. En la siguiente figura, sabiendo que las dimensiones están en metros, calcula x, y, z. (¡Atención! Recuerda que: 2a+a=3a)



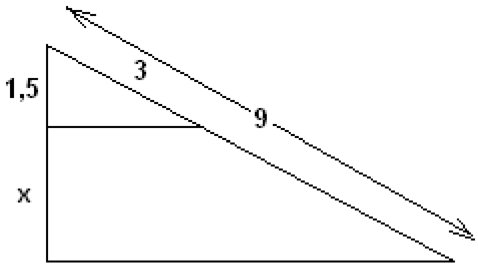
9. Calcula x en el siguiente dibujo si a = 3 cm, b = 4 cm, c = 6 cm (x se denomina segmento cuarto proporcional).



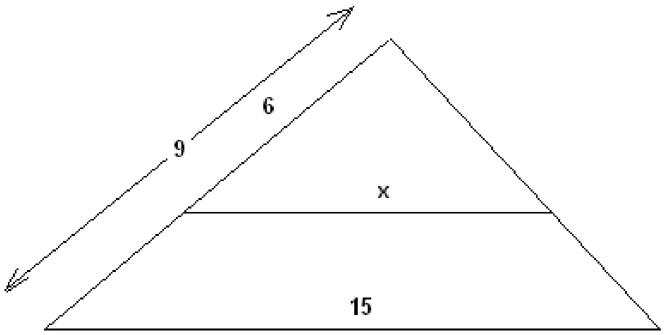
10. Halla x e y en la siguiente figura:



11. Calcula x (las unidades son metros):



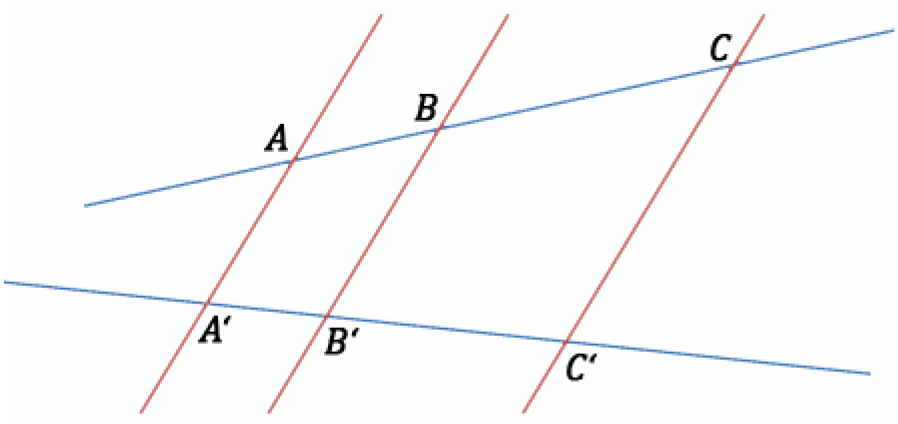
12. Calcula x (las unidades son centímetros):



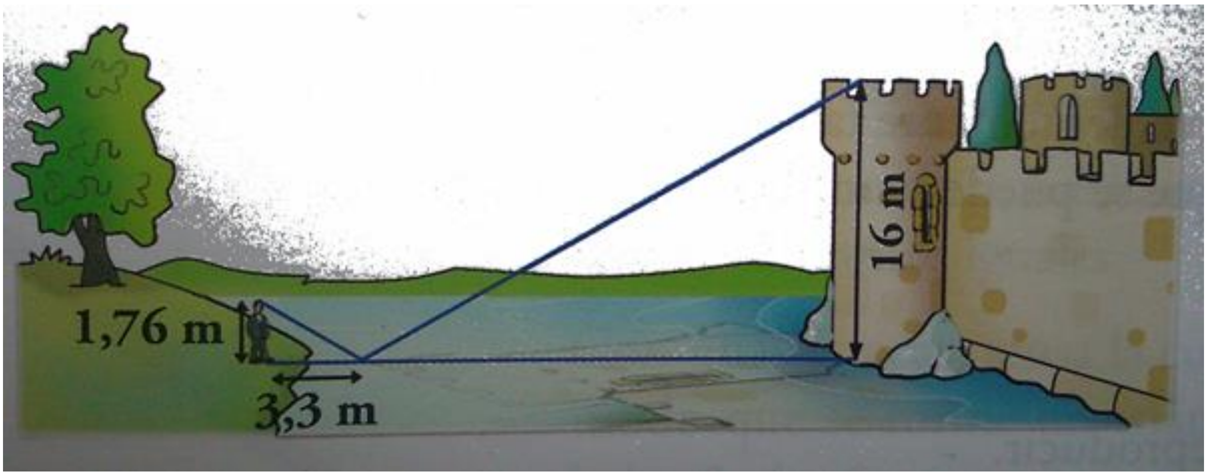
13. Dado el siguiente dibujo, y con los datos:

$$\overline{AB} = 5cm$$
$$\overline{A'B'} = 4cm$$
$$\overline{BC} = 8cm$$
$$\overline{B'C'} = x$$

Halla x



14. Calcula la distancia a la que está la persona de la torre:



LOS EJERCICIOS ANTERIORES RESUELTOS

1. Si tenemos dos triángulos, con un ángulo igual, y en el primero los lados que lo forman miden 15 y 20 cm, respectivamente; y en el segundo, los lados que lo forman miden 45 cm y 60 cm, respectivamente, ¿son dos triángulos semejantes?

Lo comprobamos: $\frac{45}{15} = \frac{60}{20} = 3 = k$ → siendo 3 la razón de semejanza. *Sí lo son*.

Ello implica que si supiésemos cuánto mide el tercer lado del pequeño, multiplicándolo por 3 obtendríamos la medida del tercer lado del mayor.

2. Las dimensiones de una fotografía son 6,5 cm. por 2,5 cm. Se quiere ampliar de manera que el lado mayor mida 26 cm. ¿Cuánto medirá el lado menor?

Calculamos la razón de semejanza → $k = \frac{26}{6{,}5} = 4$ Luego: $lado = 2{,}5 \cdot 4 = 10\ cm$

3. Se desea hacer un plano de un terreno de 100m de largo por 300m de ancho usando una escala de 1:500 ¿Cuáles serán las dimensiones del dibujo del terreno?

$100m \cdot 500 = 50000m = 50\ km$	El terreno medirá 50 x 150 km
$300m \cdot 500 = 150000m = 150\ km$	

4. Chile es un país largo y angosto, y por consiguiente, su mapa también lo es. Si consideramos que desde Arica en el norte hasta Magallanes en el sur hay, aproximadamente, 4.000 kilómetros. ¿Qué largo tendría el mapa de Chile si se dibujara un centímetro por cada kilómetro?

Si pasamos los km a cm, los 4000 km son $4 \cdot 10^3 \cdot 10^5$cm → $4 \cdot 10^8$ cm de norte a sur.

Para pasar de la realidad al mapa, de 1 km a 1 cm, dividimos por 10^5 →

$$\frac{4 \cdot 10^8}{10^5} = 4 \cdot 10^3 = 4000\ cm = 40\ metros$$

5. Los catetos de un triángulo rectángulo que miden 24 m y 10 m. ¿Cuánto medirán los catetos de un triángulo semejante al primero cuya hipotenusa mide 52 m?

Primero calculamos la hipotenusa del primer triángulo:

$h^2 = 24^2 + 10^2\ \ h^2 = 576 + 100;\ h^2 = 676; h = \sqrt{676}; h = 26\ m$

Ahora calculamos la razón de proporcionalidad entre las dos hipotenusas:

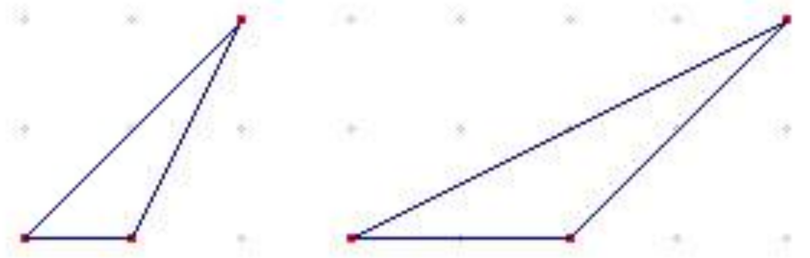
$k = \frac{52}{26} = 2$ Entonces, también multiplicamos a los dos primeros catetos por la razón de semejanza, que acabamos de hallar → $24 \cdot 2 = 48\ m$ y $10 \cdot 2 = 20m$

Los lados del nuevo triángulo rectángulo miden 20, 48 y 52 metros.

6. Dos triángulos rectángulos tienen un ángulo agudo de 35°. ¿Son semejantes?

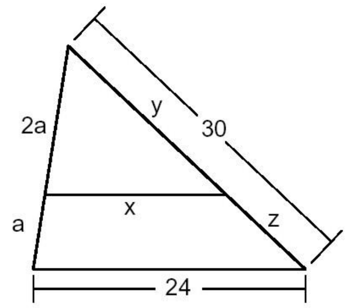
Sí lo son, ya que ambos tiene das ángulos iguales, el de 35º y el recto de 90º.

7. ¿Son semejantes las figuras siguientes?



Solución: No, ya que sus lados no son paralelos, ni sus ángulos iguales ni sus lados proporcionales

8. En la siguiente figura, sabiendo que las dimensiones están en metros, calcula x, y, z. (¡Atención! Recuerda que: 2a+a=3a)

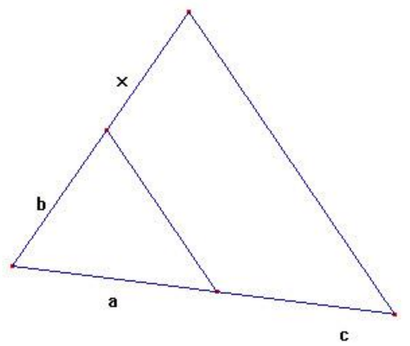


$$\frac{24}{3a}=\frac{x}{2a}\Rightarrow x=\frac{48}{3}=16\,m$$

$$\frac{24}{30}=\frac{x}{y}\Rightarrow y=\frac{30x}{24}=20\,m$$

$$\frac{y}{2a}=\frac{z}{a}\Rightarrow z=\frac{y}{2}=10\,m$$

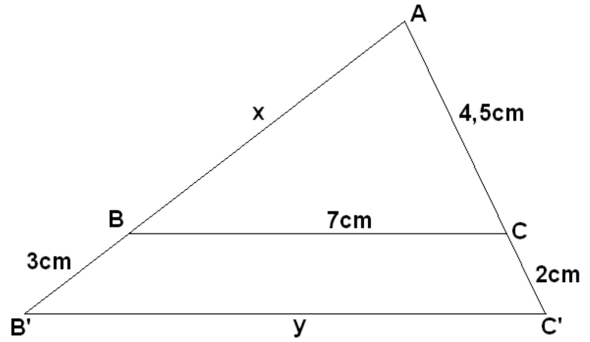
9. Calcula x en el siguiente dibujo si a = 3 cm, b = 4 cm, c = 6 cm (x se denomina segmento cuarto proporcional).



Solución:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{x}\Rightarrow\frac{3}{4}=\frac{6}{x}\Rightarrow x=\frac{6\cdot 4}{3}=8\,cm$$

10. Halla x e y en la siguiente figura:

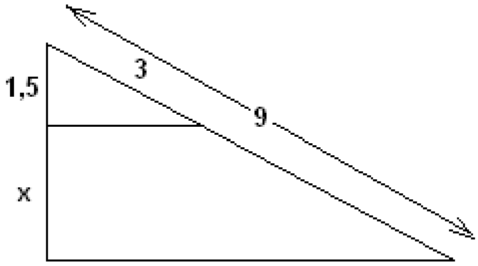


Solución: Aplicando el Teorema de Tales:

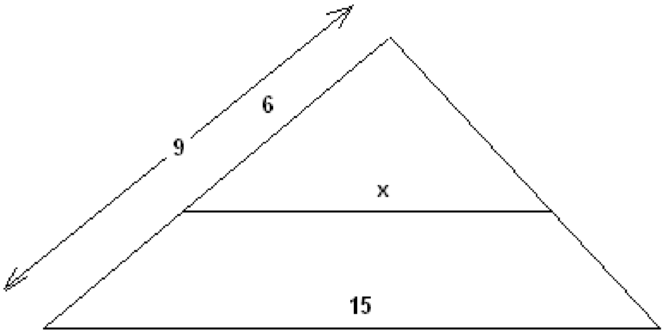
$$\frac{x}{4,5}=\frac{3}{2}\Rightarrow x=\frac{3\cdot 4,5}{2}=6,75cm$$

$$\frac{4,5}{7}=\frac{6,5}{y}\Rightarrow y=\frac{7\cdot 6,5}{4,5}=10,11cm$$

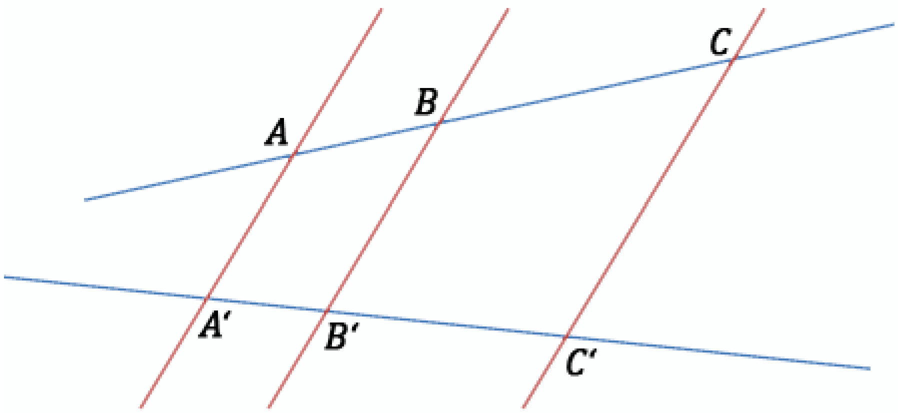
11. Calcula x (las unidades son metros):

	Solución: $\frac{3}{1{,}5}=\frac{6}{x}\Rightarrow x=\frac{6\cdot 1{,}5}{3}=3\text{m}$

12. Calcula x (las unidades son centímetros):

	Solución: $\frac{9}{6}=\frac{15}{x}\Rightarrow x=\frac{6\cdot 15}{9}=10\text{cm}$

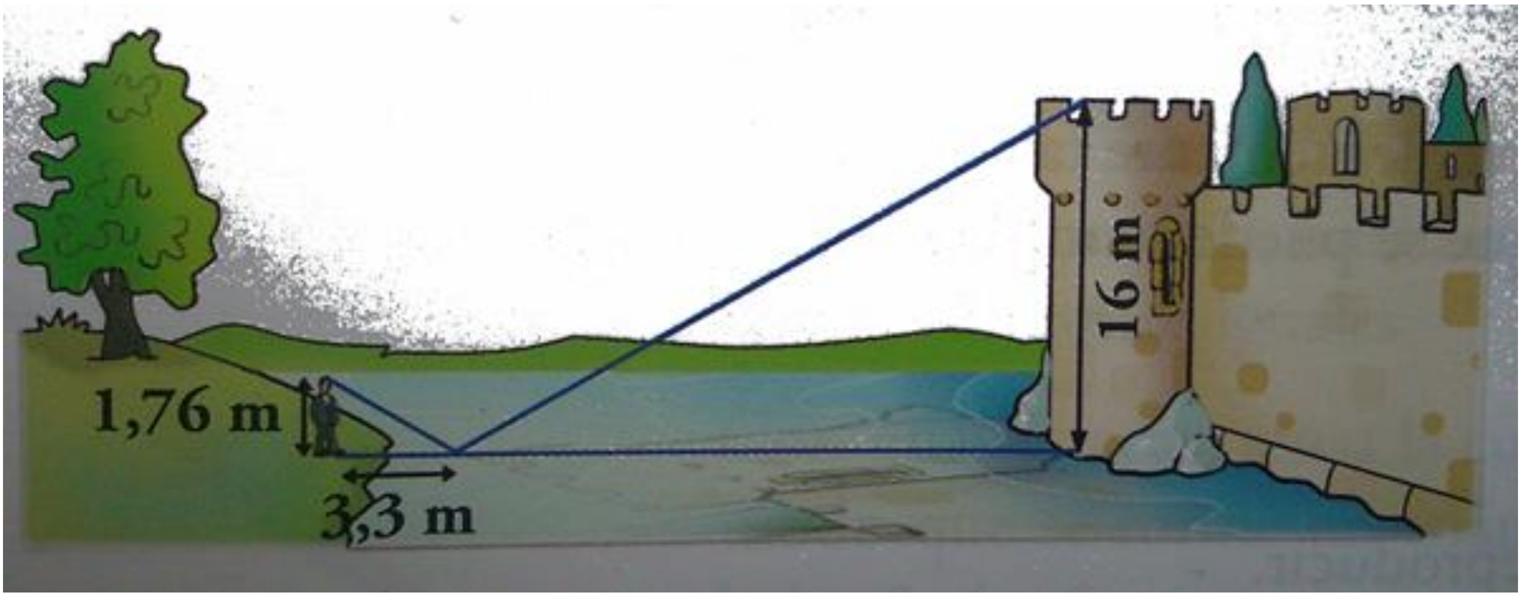
13. Dado el siguiente dibujo, y con los datos:

$\overline{AB}=5cm$ $\overline{A'B'}=4cm$ $\overline{BC}=8cm$ $\overline{B'C'}=x$ Halla x	

Podemos hacerlo de 4 formas:

$\frac{5}{4}=\frac{8}{x};5x=32;x=\frac{32}{5};x=6{,}4\ cm$	$\frac{8}{5}=\frac{x}{4};40=5x;x=6{,}4\ cm$
$\frac{8cm}{5cm}=1{,}6=k;4\cdot 1{,}6=6{,}4\ cm$	$\frac{5}{4}=1{,}25=k;\frac{8}{k}=x;x=\frac{8}{1{,}25}=6{,}4\ cm$

14. Calcula la distancia a la que está la persona de la torre:



Tenemos dos triángulos en posición de Tales (si, por ejemplo, giramos el pequeño y lo "encajamos" dentro del grande. Entonces, y teniendo en cuenta que la distancia que queremos hallar es $(3{,}3 + x)$:

$$\frac{16}{1{,}76} = \frac{x}{3{,}3}; 1{,}76x = 16 \cdot 3{,}3; x = \frac{16 \cdot 3{,}3}{1{,}76}; x = 30\, metros$$

Entonces, la distancia es: $30 + 3{,}3 = 33{,}3$ metros es la distancia entre la persona y la torre.