Teoría – Tema 9

Teoría - 5 - interpretación geométrica de la derivada y derivabilidad en un punto

Derivada de una función y recta tangente a la función

Para un punto genérico *x* este incremento instantáneo de *f(x)* lo hemos llamado derivada. Y su **interpretación geométrica nos dice que la derivada de *f(x)* en el punto genérico *x* es igual al valor de la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto *x***.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \leftrightarrow \quad \frac{d[f(x)]}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Es decir, si tenemos la función $f(x)$ y su derivada es $f'(x)$, la pendiente m de la recta tangente a la función que pase por el punto $A(x_0, y_0)$ será:

$m=f'(x_0)$ → La pendiente es el valor de la derivada evaluada en x_0

Y si tenemos la pendiente m y el punto $A(x_0, y_0)$, podemos escribir la ecuación punto pendiente de la recta tangente a la función en ese punto.

$$m=\frac{y-y_0}{x-x_0}$$

Ejemplo 1 resuelto

Calcula la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)=x^2-1$ en el punto de abscisa $x=2$.

La derivada de la función será → $f'(x)=2x$ → El valor de la pendiente de la recta tangente en el punto $x=2$ será $m=f'(2)=4$.

El valor del punto $x=2$ en la función será → $f(2)=2^2-1=3$ → Obtenemos el punto $(2,3)$.

La ecuación de la recta tangente a la función en el punto es:

$$m=\frac{y-y_0}{x-x_0} \quad \rightarrow \quad 4=\frac{y-3}{x-2} \quad \rightarrow \quad y=4x-5$$

Ejemplo 2 resuelto

Calcula la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la función $f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x)$ en el punto de abscisa $x=e$.

La derivada de la función será → $f'(x)=\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x}$ → El valor de la pendiente de la recta tangente en el punto $x=e$ será $m=f'(e)=\frac{-1}{e^2}+\frac{1}{e}=\frac{e-1}{e^2}$.

El valor del punto $x=e$ en la función será → $f(e)=\frac{1}{e}+\ln(e)=\frac{1}{e}+1=\frac{1+e}{e}$ → Obtenemos el punto $(e,\frac{1+e}{e})$.

La ecuación de la recta tangente a la función en el punto es:

$$m=\frac{y-y_0}{x-x_0} \quad \rightarrow \quad \frac{e-1}{e^2}=\frac{y-\frac{1+e}{e}}{x-e}$$

La recta normal es perpendicular a la recta tangente, por lo que el producto de las pendientes de ambas rectas debe ser igual a -1 . Es decir:

$$m_{normal}=\frac{e^2}{1-e}$$

Y la ecuación de la recta normal en el punto $(e,\frac{1+e}{e})$ resulta:

$$\frac{e^2}{1-e}=\frac{y-\frac{1+e}{e}}{x-e}$$

Derivabilidad de una función en un punto

Una vez obtenida la definición analítica de la derivada de *f(x)* podemos preguntarnos por la **derivabilidad de la función en un punto x_0**. Es decir:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Si este límite existe y es finito, decimos que la función es derivable en $x = x_0$. Y si el límite es finito, como el denominador vale *0*, el numerador también debe valer *0*.

$$\lim_{h\to 0}[f(x_0+h)-f(x_0)]=0 \;\rightarrow\; \lim_{h\to 0} f(x_0+h)=\lim_{h\to 0} f(x_0) \;\rightarrow\; \lim_{h\to 0} f(x_0+h)=f(x_0)$$

Si hacemos $x = x_0 + h$, nuestra expresión queda: $\lim_{h\to 0} f(x)=f(x_0)$

Y si $h \to 0$, significa que $x \to x_0$. Por lo tanto: $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

Es decir, el límite de la función *f(x)* cuando $x \to x_0$ es igual al valor de la función en x_0. Y esta es la definición de continuidad en un punto. Por lo tanto, **si una función es derivable en x_0 también será continua en x_0. El inverso, no siempre es cierto**.

De la misma manera que en continuidad estudiamos los límites laterales (en asíntotas verticales, en funciones definidas a trozos, etc.), en derivabilidad también podemos hablar de derivada por la izquierda y derivada por la derecha.

$$f'(x_0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \rightarrow \text{derivada lateral izquierda}$$

$$f'(x_0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \rightarrow \text{derivada lateral derecha}$$

Si ambos límites existen, son finitos e iguales, decimos que existe la derivada de la función en el punto x_0.

$$f'(x_0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \;=\; f'(x_0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \;\rightarrow\; \exists f'(x_0)$$

Concluyendo: **para afirmar la derivabilidad de una función *f(x)* en un punto x_0 debemos:**

1. Demostrar la continuidad de *f(x)* en x_0.

2. Aplicar la definición analítica de derivada en x_0 y comprobar si el resultado es finito. En funciones definidas a trozos, deberemos calcular las derivadas laterales y confirmar que son iguales y finitas.