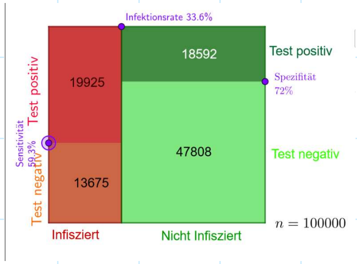
Übersicht bedingte WS

$P_B(A)$ bezeichnet die Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B d. h. man weiß bereits sicher, dass B zutrifft bzw. eingetreten ist, aber bezüglich A weiß man es nicht und fragt nach der Wahrscheinlichkeit von A.
$P_A(B)$: bezeichnet die Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung A d. h. man weiß bereits sicher, dass A zutrifft bzw. eingetreten ist, aber bezüglich B weiß man es nicht und fragt nach der Wahrscheinlichkeit von B.
$P(A \cap B)$: bezeichnet die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses "A und zugleich B" d. h. man hat keine zusätzlichen Informationen und fragt nach der Wahrscheinlichkeit, mit der A und B gemeinsam eintreten.



Wahrscheinlichkeit nach Zusatzinformation
Beispiel.
Ausgangssituation fairer Würfel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit ein 2 zu würfeln E?

$P(\{2\}) = \frac{|\{2\}|}{|\{1,2,3,4,5,6\}|} = \frac{1}{6}$

Zusatzinformation
Man weiß, die gewürfelte Zahl ist gerade: G

Die Wahrscheinlichkeit von E

$$P(G|E) = P_G(E)$$

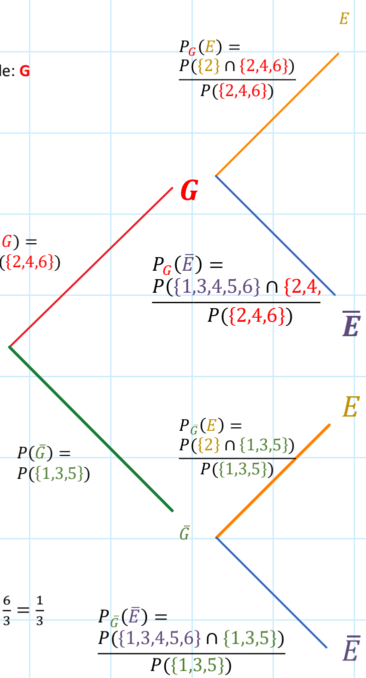
... unter der Bedingung von G

$$P_G(E) = \frac{P(E \cap G)}{P(G)}$$

$$P_{\{2,4,6\}}(\{2\}) = \frac{|\{2\}|}{|\{2,4,6\}|} = \frac{1}{3}$$

..E..

$$P_{\{2,4,6\}}(\{2\}) = \frac{\frac{|\{2\}|}{|\{1,2,3,4,5,6\}|}}{\frac{|\{2,4,6\}|}{|\{1,2,3,4,5,6\}|}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{3} = \frac{1}{3}$$



$P(G) =$
$P(\{2,4,6\})$

$P(\bar{G}) =$
$P(\{1,3,5\})$

$P_G(E) = \frac{P(\{2\} \cap \{2,4,6\})}{P(\{2,4,6\})}$

$P_G(\bar{E}) = \frac{P(\{1,3,4,5,6\} \cap \{2,4,6\})}{P(\{2,4,6\})}$

$P_{\bar{G}}(E) = \frac{P(\{2\} \cap \{1,3,5\})}{P(\{1,3,5\})}$

$P_{\bar{G}}(\bar{E}) = \frac{P(\{1,3,4,5,6\} \cap \{1,3,5\})}{P(\{1,3,5\})}$

$P(G \cap E) = P(\{2\} \cap \{2,4,6\}$
$= P(\{2\})$

$P(\bar{E} \cap G)$
$P(\{1,3,4,5,6\} \cap \{2,4,6\})$
$= P(\{4,6\})$

$P(\bar{G} \cap E) =$
$P(\{2\} \cap \{1,3,5\}) = P(\{\emptyset\})$

$P(\bar{E} \cap \bar{G}) =$

$P(\{1,3,4,5,6\} \cap \{1,3,5\}) = P(\{1,3,5\})$

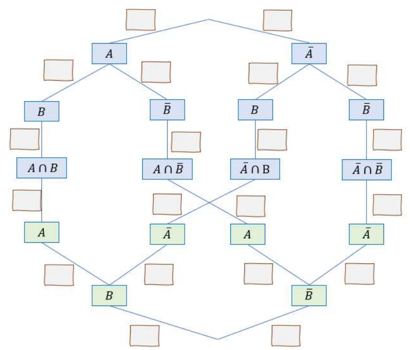
	G: Gerade	$\bar{G}$: Nichtgerade	
$E = \{2\}$	$G \cap E$ $\{2\} \cap \{2,4,6\} = \{2\}$	$\bar{G} \cap E$ $\{2\} \cap \{1,3,5\} = \{\emptyset\}$	$(G \cap E) \cup (\bar{G} \cap E) = E$ $\{2\} \cup \{\emptyset\} = \{2\}$
$\bar{E} = \{1,3,4,5,6\}$	$\bar{E} \cap G$ $\{1,3,4,5,6\} \cap \{2,4,6\} = \{4,6\}$	$\bar{E} \cap \bar{G}$ $\{1,3,4,5,6\} \cap \{1,3,5\} = \{1,3,5\}$	$(\bar{E} \cap G) \cup (\bar{E} \cap \bar{G}) = \bar{E}$ $\{4,6\} \cup \{1,3,5\} = \{1,3,4,5,6\}$
	$(G \cap E) \cup (\bar{E} \cap G) = G$ $\{2\} \cup \{4,6\} = \{2,4,6\}$	$(\bar{G} \cap E) \cup (\bar{E} \cap \bar{G}) = \bar{G}$ $\{1,3,5\} \cup \{\emptyset\} = \{1,3,5\}$	$G \cup \bar{G}$ *bzw.* $= E \cup \bar{E}$ $=\{1,2,3,4,5,6\}$

	G: Gerade	$\bar{G}$: Nichtgerade	
$E = \{2\}$	$P(G \cap E)$ $P(\{2\} \cap \{2,4,6\}) = P(\{2\})$	$P(\bar{G} \cap E)$ $P(\{2\} \cap \{1,3,5\}) = P(\{\emptyset\})$	$P((G \cap E) \cup (\bar{G} \cap E)) =$ $P(G \cap E) + P(\bar{G} \cap E)) = P(E)$ $P(\{2\} \cup \{\emptyset\}) = P(\{2\}) + P(\{\emptyset\}$
$\bar{E} = \{1,3,4,5,6\}$	$P(\bar{E} \cap G)$ $P(\{1,3,4,5,6\} \cap \{2,4,6\})$ $= P(\{4,6\})$	$P(\bar{E} \cap \bar{G})$ $P(\{1,3,4,5,6\} \cap \{1,3,5\}) = P(\{1,3,5\})$	$P((\bar{E} \cap G) \cup (\bar{E} \cap \bar{G})) =$ $P((\bar{E} \cap G) + P(\bar{E} \cap \bar{G}) = P(\bar{E})$ $P(\{4,6\} \cup \{1,3,5\}) \ = P(\{4,6\} \cup \{1,3,5\}) =$ $P(\{4,6\}) + P(\{1,3,5\}) = P(\{1,3,4,5,6\})$
	$P((G \cap E) \cup (\bar{E} \cap G)) =$ $P((G \cap E) + P(\bar{E} \cap G) = P(G)$ $P(\{2\} \cup \{4,6\}) =$ $P(\{2\}) + P(\{4,6\}) = P(\{2,4,6\})$	$P((\bar{G} \cap E) \cup (\bar{E} \cap \bar{G})) =$ $P((\bar{G} \cap E) + P(\bar{E} \cap \bar{G}) = P(\bar{G})$ $P(\{1,3,5\}) + P(\{\emptyset\}) = P(\{1,3,5\})$	$P(G \cup \bar{G}) = 1$ *bzw.* $P(E \cup \bar{E})$ $P(\{1,2,3,4,5,6\})$

Das Ereignis G heißt **unabhängig** vom Ereignis E, wenn das Eintreten von G die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von E nicht beeinflusst.
Also $P(E)=P_G(E)$
Daraus lässt sich ableiten: Wenn das Ereignis E unabhängig ist von Ereignis G

$$P(E) = P_G(E) = \frac{P(E \cap G)}{P(G)} = \frac{P(E) \cdot P(G)}{P(G)} = P(E)$$

Im Baumdiagramm erkennt man die Unabhängigkeit von Ereignissen daran, dass in der 2. Stufe die Teilbäume gleich sind. Sind sie hingegen verschieden, dann sind die Ereignisse voneinander abhängig.



Hinweis

1. Sprachliche Hinweise im Aufgabentext.
   - wenn man bereits weiß, dass...
   - unter der Bedingung, dass ....
   Achtung: Diese Formulierungen sind meist versteckt. Achten Sie darauf, ob der Text Informationen enthält, die auf eine veränderte Grundmenge schließen lassen.
2. Man muss sich das Ereignis B ggfs. erst zusammenbasteln: $B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$

Doppelbäume
Hinweis sind bedingte Wahrscheinlichkeiten ist $P(A)$ und $P_A(B)$ und beispielsweise $P_B(A)$ so empfiehlt es sich Doppelbäume zu verwenden