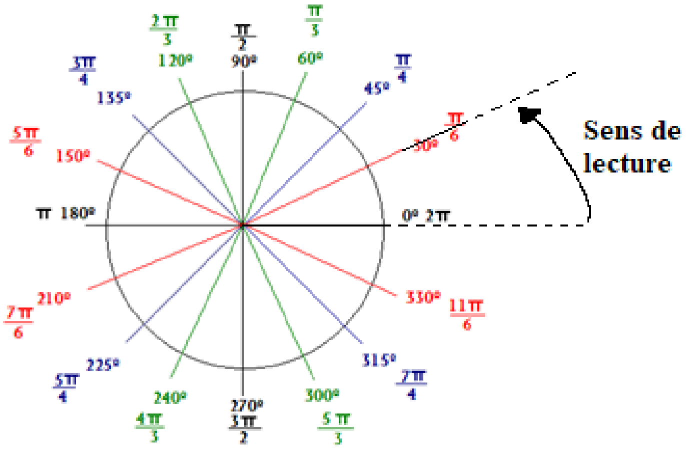
I/ Rappel : Notion de radian et d'angle orienté sur le cercle trigonométrique.

1) Notion de cercle trigonométrique :

Le cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1 qui sert à repérer des angles dans un sens déterminé nommé sens trigonométrique. Ces angles sont repérés en radians. Les radians sont définis par deux règles, ils sont proportionnels au degrés, 0° = 0 rad et 180° = π rad. La valeur en radian représente simplement la longueur parcourue le long de l'arc de cercle en partant de 0 jusqu'à obtenir l'angle désiré.



Ce qui nous donne le tableau suivant à connaître par cœur :

Mesure en degrés	0	30	45	60	90	180
Mesures en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

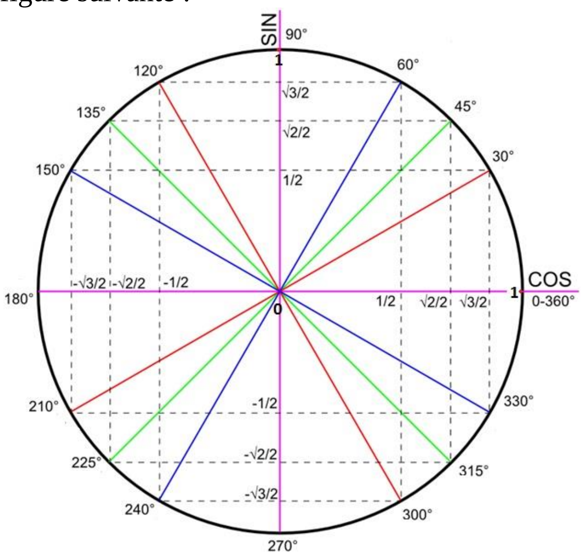
2) Notion de mesure principale :

Avec la définition précédente, il est possible pour un même angle d'avoir plusieurs mesures, selon le sens dans lequel on compte ou le nombre de tours effectués. Pour simplifier cela nous avons défini la mesure principale d'un angle comme la mesure d'un angle comprise dans]-π ; π]. Cf la fiche méthode pour trouver la mesure principale d'un angle.

II/ Sinus et cosinus d'un angle orienté :

1) Définition :

Graphiquement pour repérer le sinus et le cosinus d'un angle, il suffira de lire les coordonnées du point associé à l'angle sur le cercle trigonométrique. L'abscisse de ce point sera le cosinus et son ordonnée sera son sinus. Ce qui nous donne la figure suivante :



Cela nous donne donc le tableau suivant lui aussi à retenir par cœur :

Mesure de l'angle en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Mesure de l'angle en degrés	0	30	45	60	90
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

2) Relations et propriétés :

La figure possédant un certain nombre d'axes de symétrie, il est possible d'établir plusieurs relations et propriétés entre sinus et cosinus. Toutes les relations qui suivent se retrouvent donc facilement en connaissant le cercle.

$-1 \leq cos(x) \leq 1$
$-1 \leq sin(x) \leq 1$
$cos^2(x) + sin^2(x) = 1$
$cos(x + 2k\pi) = cos(x)$
$sin(x + 2k\pi) = sin(x)$
car ajouter un tour complet ne vas pas changer la valeur du cosinus ou du sinus.

$cos(-x) = cos(x)$
$cos(\pi - x) = - cos(x)$
$cos(\pi + x) = - cos(x)$
$cos(\frac{\pi}{2} - x) = sin(x)$
$cos(\frac{\pi}{2} + x) = - sin(x)$

$sin(-x) = - sin(x)$
$sin(\pi - x) = sin(x)$
$sin(\pi + x) = - sin(x)$
$sin(\frac{\pi}{2} - x) = cos(x)$
$sin(\frac{\pi}{2} + x) = cos(x)$

3) Utilisation des propriétés pour lire ou calculer des sinus et cosinus :

a) Lecture directe de cosinus et sinus sur le cercle :

Déterminons les valeurs exacte de :

- $\cos(-\frac{\pi}{4})$:

En regardant le cercle, on remarque que $-\frac{\pi}{4}$ est le symétrique de $\frac{\pi}{4}$ par rapport à l'axe des abscisses. Donc leurs valeurs de cosinus sont identiques. Donc $\cos(-\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

- $\sin(\frac{7\pi}{6})$:

Si on place $\frac{7\pi}{6}$ sur le cercle, on remarque qu'il a le même sinus que $-\frac{\pi}{6}$, or $-\frac{\pi}{6}$ est le symétrique de $\frac{\pi}{6}$ par l'axe des abscisses. Donc son sinus est l'opposé $\frac{\pi}{6}$. On en déduit que : $\sin(\frac{7\pi}{6}) = \sin(-\frac{\pi}{6}) = -\sin(\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$

b) Utilisation des propriétés pour calculer des valeurs exactes de sinus et cosinus :

Exemple 1 :

On donne $sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, en déduire la valeur exacte de $sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

Pour cela il faut utiliser une des relations ci-dessus. Il faut faire « apparaitre » π ou $\frac{\pi}{2}$ ainsi que l'angle donné $(\frac{\pi}{12})$ dans l'angle dont on veut calculer le sinus pour pouvoir l'exprimer à partir de $sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$. Ici on remarque que :

$\frac{11\pi}{12} = \frac{12\pi}{12} - \frac{\pi}{12} = \pi - \frac{\pi}{12}$ or on sait que $sin(\pi - x) = sin(x)$. Donc $sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = sin\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right) = sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Exemple 2 :

On donne $sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, en déduire la valeur exacte de $cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Pour cela nous allons à nouveau chercher à utiliser une des relations données précédemment. Ici on remarque que :

$\frac{5\pi}{12} = \frac{6\pi}{12} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$ or on sait que $cos(\frac{\pi}{2} - x) = sin(x)$. Donc $cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

III/ Dérivée des fonctions trigonométriques :

Fonction	Dérivée
$sin(x)$	$cos(x)$
$cos(x)$	$- sin(x)$
$sin(a x + b)$	$a cos(a x + b)$
$cos (a x + d)$	$- a sin(a x + b)$

Exemples :

$f(x) = sin(3x + 7)$ $f'(x) = 3 cos(3x + 7)$

$g(x) = cos(3x + 7)$ $g'(x) = - 3 sin(3x + 7)$