Chalmers tekniska högskola
Kungliga tekniska högskolan
Stockholms universitet
Göteborgs universitet

Matematik- och fysikprovet Chalmers, KTH, SU, GU

Matematikprovet GU

Chalmers: Arkitektur och teknik, Automation och mekatronik, Elektroteknik, Kemiteknik med fysik, Teknisk fysik, Teknisk matematik

KTH: Design och produktframtagning, Elektroteknik, Farkostteknik, Maskinteknik, Materialdesign, Teknisk fysik, Teknisk matematik

SU: Kandidatprogrammen i astronomi, i fysik, i meteorologi, samt Sjukhusfysikerprogrammet

GU: Kandidatprogrammen i fysik, samt i matematik

Antagningsprov 2024 - MATEMATIK

2024-05-18, kl. 9.00 – 12.00
Skrivtid: 180 min
Inga hjälpmedel tillåtna.

Svar på uppgifterna i del A (uppgifter 1 - 20) och del B (uppgifter 21 - 30) lämnas in på utdelat svarsformulär. Den fullständiga lösningen till uppgiften i del C lämnas in på utdelat lösblad. Tesen med uppgifterna och kladdpapper lämnas *inte* in. Du rekommenderas att ta med dig tesen med dina svar inringade / ifyllda, för att i efterhand kunna jämföra med facit.

A. Markera rätt svar genom att ringa in rätt svarsalternativ på svarsformuläret. (1p för varje rätt svar; OBS! Endast ett rätt svar per uppgift.)

1. Talen a och b är reella. Givet att $x = (a + b\sqrt{3})^3 - (a - b\sqrt{3})^3$, så gäller att x är lika med

   (a) $2ab(3a+b)$; (b) $6b\sqrt{3}(a^2+b^2)$; (c) $2b(3a^2+b^2)$; (d) inget av (a)-(c).

2. Om a och b är reella tal så är villkoret *"minst ett av talen a och b är skilt från* 0*"* ekvivalent med

   (a) $ab \neq 0$; (b) $a^2 + b^2 \neq 0$; (c) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \neq 0$; (d) inget av (a)-(c).

3. Om x är ett reellt tal och $\sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x + 1} = -2$, så gäller

   (a) $x \geq 1$; (b) $-1 \leq x \leq 1$; (c) $x \leq -1$; (d) inget av (a)-(c).

4. Olikheten $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 4$ är ekvivalent med olikheten

(a) $x < 0$; (b) $x < 2$; (c) $x < -2$; (d) inget av (a)-(c).

5. Alla lösningar till olikheten $\frac{x}{2x-1} \geq \frac{1}{x}$ ges av

(a) alla negativa x samt alla $x \geq 1$; (b) alla reella x;

(c) alla negativa x samt alla $x > \frac{1}{2}$; (d) inget av (a)-(c).

6. Om $x \boxplus y = |x| - \big|\,|x+y| - |y|\,\big|$ för alla reella tal x och y, så gäller för alla reella x och y att

(a) $x \boxplus y = y \boxplus x$; (b) $(2x) \boxplus (-x) = 2x$;

(c) $x \boxplus y \geq 0$; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

7. Antalet heltalslösningar till olikheten $bx + 17 - 2x^2 > 0$, där b är ett reellt tal, är

(a) 0; (b) ändligt, skilt från 0; (c) oändligt; (d) kan ej avgöras.

8. Givet är ekvationen $az^2 + bz + c = 0$, där $abc \neq 0$. Två av de tre koefficienterna a, b, c är reella och en är icke-reell. Då kan man dra slutsatsen att ekvationen **inte** är ekvivalent med någon ekvation $Az^2 + Bz + C = 0$, där

(a) alla tre koefficienterna är reella;

(b) alla tre koefficienterna är icke-reella;

(c) en koefficient är reell och två av koefficienterna är icke-reella;

(d) inget av (a)-(c), den kan vara ekvivalent med ekvationer av alla tre typerna.

9. Givet är ekvationen $az^2 + bz + c = 0$, där $abc \neq 0$. Två av de tre koefficienterna a, b, c är reella och en är icke-reell. Då kan man dra slutsatsen att

(a) en av ekvationens lösningar är reell och den andra icke-reell;

(b) minst en av ekvationens lösningar är icke-reell;

(c) minst en av ekvationens lösningar är reell;

(d) inget av (a)-(c).

10. Priset för en förpackning av en viss produkt har ökat med 10%, medan innehållets vikt har minskat med 10%. Kilopriset för produkten har då ökat med

(a) mindre än 20%; (b) exakt 20%; (c) mer än 20%; (d) det går inte att avgöra.

11. Antalet reella lösningar till ekvationen $9e^{2x} + ae^x - 1 = 0$ för $a > 0$ är

(a) 1; (b) 2; (c) kan ej avgöras; (d) inget av (a)-(c).

12. För alla positiva reella tal x och y gäller att

(a) $\ln x + \ln y = \ln x \cdot \ln y$; (b) $\ln x + \ln y = \ln(x + y)$;

(c) $\ln x + \ln y = \ln(xy)$; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

13. För alla positiva reella tal x och p gäller att

(a) $p \ln x = \ln x^p$; (b) $p \ln x = (\ln x)^p$;

(c) $p \ln x = \ln(x + e^p)$ (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

14. Om $\sin\alpha > 0$ och $\tan\alpha = p$, så gäller att $\cos\alpha$ är lika med

(a) $\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}$; (b) $\dfrac{|p|}{\sqrt{1+p^2}}$; (c) $\dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}}$; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

15. Om $\cos\alpha > 0$ och $\tan\alpha = p$, så gäller att $\sin\alpha$ är lika med

(a) $\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}$; (b) $\dfrac{|p|}{\sqrt{1+p^2}}$; (c) $\dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}}$; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

16. Om $\alpha \in [0, 2\pi]$, så gäller

(a) $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$; (b) $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$;

(c) $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{2}}$; (d) ingen av formlerna gäller generellt.

17. Ekvationen $x^2 + bx + c = 0$, där koefficienterna b och c är reella tal, har lösningarna $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{23}}{2}$. Man kan då dra slutsatsen att

(a) både b och c är heltal; (b) minst ett av talen b och c inte är ett heltal;

(c) varken b eller c är heltal; (d) inget av (a)-(c).

18. En triangel har sidlängderna $\sqrt{11}$, $\sqrt{39}$, $\sqrt{92}$ längdenheter. Den minsta vinkeln i triangeln är då

(a) $30°$; (b) skild från $30°$;

(c) det går inte att avgöra; (d) det finns ingen sådan triangel.

19. En triangel har sidlängderna $\sqrt{13}$, $\sqrt{41}$, $\sqrt{52}$ längdenheter. Den minsta vinkeln i triangeln är då

(a) $30°$; (b) skild från $30°$;

(c) det går inte att avgöra; (d) det finns ingen sådan triangel.

20. Givet är en tetraeder $ABCD$, sådan att $|AB| = |AC| = |AD| = \sqrt{2}$ längdenheter, och de tre plana vinklarna vid hörnet A är räta. Tetraederns höjd från hörnet A mot sidan BCD har i samma längdenheter längden

(a) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$; (b) annat tal;

(c) det går inte att avgöra; (d) det finns ingen sådan tetraeder.

B. Lös uppgifterna nedan; ange endast svar på svarsformuläret. (2p för varje rätt svar)

21. Beräkna

$$\frac{\frac{4}{7}-\frac{3}{2}}{\frac{2}{5}+\frac{1}{4}}.$$

Ange svaret på formen $\dfrac{p}{q}$, där p, q är heltal och bråket $\dfrac{p}{q}$ är maximalt förkortat.

22. Bestäm alla reella tal a, för vilka ekvationen $x^2 - 2ax + (a^2 + 2) = 0$ har två icke-reella lösningar som befinner sig på avstånd 5 från talet 0. Ange det minsta talet a med den egenskapen.

23. Givet funktionen $f(x) = \ln \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$, beräkna $f'(x)$ och ange $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

24. Beräkna $\displaystyle\int_0^2 \left(e^{-2x} - \frac{2}{3-x} + \cos\frac{x}{3}\right) dx.$

25. En geometrisk talföljd har kvoten q. Bestäm de värden q kan ha givet att det andra elementet i följden är 1 och summan av de fyra första elementen i följden är 4. Ange summan av dessa värden.

26. Lös ekvationen

$$\frac{1+\tan^2 x}{1-\tan^2 x} = 4\sin 2x.$$

Ange summan av de två minsta positiva lösningarna.

27. Lös olikheten

$$(2x-3)^3(x+7)^7(x+5)^4 < 0.$$

Ange summan av olikhetens heltalslösningar.

28. I triangeln ABC gäller att $|AB| = 7$ l.e., $|AC| = |BC| = 6$ l.e. Beräkna och ange längden av höjden från hörnet A mot sidan BC.

29. Två cirklar tangerar den räta linjen t och ligger på samma sida om den. Den ena cirkeln har medelpunkt O_1 och radie R, den andra har medelpunkt O_2 och radie r, där $r < R$. Avståndet mellan de två medelpunkterna är $|O_1O_2| = d > R + r$. Linjen t skär linjen som binder samman cirklarnas medelpunkter i punkten P. Beräkna och ange avståndet $|PO_2|$. (Alla längder och avstånd mäts i samma längdenhet.)

30. Romben $ABCD$ har sidlängd a (längdenheter). Summan av dess diagonallängder är $|AC| + |BD| = 2d$ (längdenheter). Beräkna och ange rombens area.

C. Ge fullständig lösning till uppgiften nedan. (max 5p)

Lös olikheten

$$\sqrt{4x - 3 - x^2} - \sqrt{7x - 10 - x^2} \geq 1.$$