Vlnivé meditace

Rovnice postupné vlny

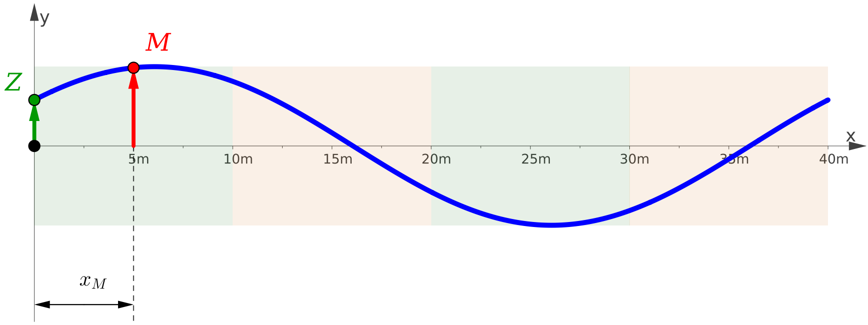
Žán Pól Kastról

13. ledna 2024

1 Začneme příkladem

Příklad 1: Tajemný EM!

V počátku souřadné soustavy Oxy je zdroj kmitání s amplitudou $y_m = 4\,\mathrm{cm}$ a periodou $T = 20\,\mathrm{s}$. Ve směru **kladné poloosy** x se od zdroje šíří postupná vlna rychlostí $c = 2\,\mathrm{ms^{-1}}$. Ve vzdálenosti $x_M = 5\,\mathrm{m}$ od zdroje se nachází tajemný bod M. Najdi rovnici jeho kmitání!



Obr. 1:

https://www.geogebra.org/m/uqpbdnsr

Zdroj Z bude kmitat podle rovnice

$$y(t) = y_m \sin \omega t \tag{1}$$

Pro jeho úhlovou frekvenci ω platí:

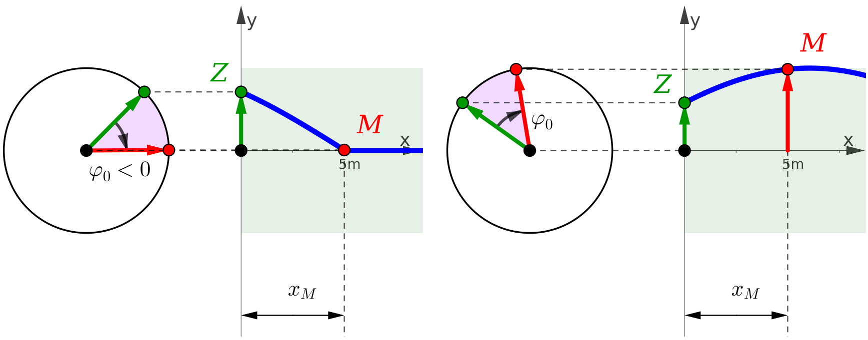
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{20} = \frac{\pi}{10}[Hz]$$

Bod M se rozkmitá až ve chvíli, kdy k němu vlna dorazí (obr.2a), takže až po jistém čase t_0 a získá proto fázové zpoždění φ_0. Bude tedy kmitat podle rovnice:

$$y(t) = y_m \sin(\omega t + \varphi_0) \tag{2}$$

Toto fázové zpoždění měříme od fázoru bodu Z k fázoru bodu M (viz obr.2), tedy *ve směru* hodinových ručiček, a proto je **záporné**. Proto pro φ_0 platí vztah $\varphi_0 = -\omega t_0$, takže po dosazení do (2) máme:

$$y(t) = y_m \sin(\omega t - \omega t_0) = y_m \sin \omega (t - t_0) \tag{3}$$



(a) Bod M právě začíná kmitat. (b) Bod M je za Z fázově opožděn.

Obr. 2: Fázové zpoždění φ_0 bodu M je **záporné**.

Protože t_0 je doba, za kterou vlna urazí dráhu x_M rychlostí c, je

$$t_0 = \frac{x_M}{c} \tag{4}$$

Po dosazení do (3) dostáváme rovnici kmitání bodu M:

$$\boxed{y(t) = y_m \sin \omega \left(t - \frac{x_M}{c} \right)} \tag{5}$$

Po číselném dosazení:

$$\boxed{y(t) = 0,04 \sin \frac{\pi}{10} \left(t - \frac{5}{2} \right)} \tag{6}$$

2 Odvození rovnice postupné vlny

Nyní výsledky předchozího příkladu zobecníme. Uvědomíme si, že rovnici (5) můžeme použít pro **jakýkoli bod vlny**, stačí jen za x_M dosadit jeho x-ovou souřadnici.

V rovnici (c) tedy budeme psát místo x_M jen x bez indexu, kde x bude souřadnice libovolného bodu vlny. Dostaneme **rovnici postupné vlny** ($\mathcal{ROPOVLN}$), která postupuje **ve směru kladné poloosy** x:

$$\boxed{y(x, t) = y_m \sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right)} \tag{7}$$

Všimněme si, že jsme dostali vztah pro okamžitou výchylku pro **libovolné** x a **libovolné** t. Okamžitá výchylka je tedy nyní *funkcí dvou proměnných*. Proto jsme na levé straně připsali do závorky ještě x, abychom tuto skutečnost zdůraznili.

V rovnici jsou *proměnné* vyznačeny červeně a *konstanty*, které charakterizují vlnu (amplituda, úhlová frekvence a rychlost šíření), zeleně.

Rovnice (7) není již obyčejná rovnice popisující kmitání jednoho konkrétního bodu (jako rovnice (5) a (6) z předch. příkladu), ale je to rovnice, která popisuje chování celé postupné vlny v *čase* a v *prostoru*!

Rovnici (7) můžeme upravit do dalších dvou tvarů:

$$y(x, t) = y_m \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{c} \right)$$

$$y(x,t) = y_m \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{cT} \right)$$

$$\boxed{y(x,t) = y_m \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)} \tag{8}$$

Tento tvar je pěkně symetrický, takže se dobře pamatuje. V závoře máme v rozdílu dva podobné členy – **časový** a **prostorový**.

Nyní roznásobíme závoru:

$$y(x,t) = y_m \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x \right)$$

V závoře máme kromě proměnných t, x dva podobné zlomky. Prvním z nich je, jak víme, ω – **úhlová frekvence**, čili **úhlový kmitočet**.

Druhý člen označíme k a budeme mu říkat **úhlové vlnové číslo** nebo **úhlový vlnočet**:

$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}} \tag{9}$$

Odtud dostáváme krástný, nejčastěji používaný tvar $\mathcal{ROPOVLN}$:

$$\boxed{y(x,t) = y_m \sin (\omega t - kx)} \tag{10}$$

Poznámka 1: V našem odvození jsme vycházeli z rovnice kmitání zdroje Z ve tvaru

$$y(t) = y_m \sin \omega t$$

To znamená, že v čase $t = 0$, kdy jsme začali děj sledovat, byla **okamžitá výchylka nulová** a kmitající bod se právě pohybuje **nahoru** – ve směru kladné poloosy y.

Klidně ale můžeme začít kmity zdroje Z sledovat v okamžiku, kdy je opět **okamžitá výchylka nulová**, ale těleso se pohybuje **dolů** – proti směru kladné poloosy y. Potom je kmitání zdroje dáno rovnicí

$$y(t) = -y_m \sin \omega t$$

Rovnice postupné vlny nám potom vyjde se znamením minus:

$$y(x, t) = -y_m \sin (\omega t - kx)$$

Znamení minus ale vtáhneme do sinusu a dostáváme $\mathcal{ROPOVLN}$ ve tvaru

$$\boxed{y(x, t) = y_m \sin (kx - \omega t)} \tag{11}$$

V porovnání s rovnicí (10) jsou zde členy v závoře prohozené. Rovnice (10) a (11) jsou zcela rovnocenné, rozdíl je pouze v tom, zda se zdroj v čase $t = 0$ pohybuje nahoru či dolů.

Poznámka 2: Jak bude vypadat $\mathcal{ROPOVLN}$ pro vlnu, která bude postupovat ve směru **záporné poloosy** x?

V našem odvození musíme v rovnici (4) přidat znemení **minus**, pač $t_0 > 0$, ale $x_M < 0$:

$$t_0 = -\frac{x_M}{c}$$

Potom bude mít rovnice (5) tvar

$$y(t) = y_m \sin \omega \left(t + \frac{x_M}{c}\right)$$

a v rovnicích (7), (8) a (10) bude v závoře znamení **plus**:

$$\boxed{y(x, t) = y_m \sin \omega \left(t + \frac{x}{c}\right)} \tag{12}$$

$$\boxed{y(x,t) = y_m \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)} \tag{13}$$

$$\boxed{y(x,t) = y_m \sin\left(\omega t + kx\right)} \tag{14}$$

3 Časové a prostorové veličiny v $\mathcal{ROPOVLN}$

V rovnici postupné vlny

$$y(x,t) = y_m \sin\left(\omega t - kx\right)$$

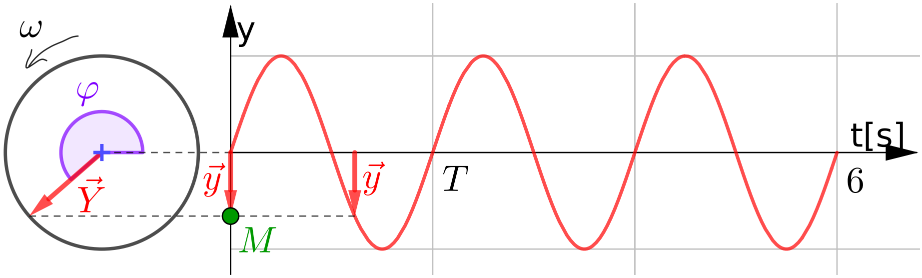
vystupují v závoře dva členy

- **časový** člen ωt, který vystihuje kmitání jednotlivých bodů vlny v čase. S ním jsou spjaté veličiny *doba kmitu*, *kmitočet*, *úhlový kmitočet*.
- **prostorový** člen kx, který vystihuje rozložení bodů vlny v prostoru. S ním jsou spjaté veličiny *délka vlny*, *vlnočet*, *úhlový vlnočet*.

Musíme si v nich udělat pořádek a ukázat, jak spolu vzájemně souvisejí.

3.1 Doba kmitu, kmitočet, úhlový kmitočet

Doba kmitu T: (*perioda*) je doba, za kterou vykoná kmitající těleso **jeden kmit**. Jednotka je sekunda.



Obr. 3: Časový diagram kmitání libovolného bodu M vlny.

Kmitočet f: (*frekvence*) je slovo, které vzniklo ze sousloví „kmitů počet“. Jedná se tedy o počet kmitů N, který vykoná kmitající těleso za určitou dobu Δt. Definice kmitočtu je proto

$$\boxed{f = \frac{N}{\Delta t}} \tag{15}$$

Jednotka je patrná z definice, tedy s^{-1}, což se Hz.

Vztah mezi T a f: je patrný ze vzorce (15) – vezmeme-li $N = 1$, vykonalo těleso jeden kmit, takže $\Delta t = T$ a dostáváme:

$$\boxed{f = \frac{1}{T} \qquad T = \frac{1}{f}} \tag{16}$$

V obrázku 3 vykonalo těleso 3 kmity za 6 sekund, takže dle vztahu (15) je frekvence kmitů

$$f = \frac{3}{6} = 0{,}5\,\mathrm{Hz}$$

a perioda je

$$T = \frac{6}{3} = 2\,\mathrm{s}$$

Úhlový kmitočet ω: (úhlová frekvence) je veličina odpovídající úhlové rychlosti u rovnoměrného pohybu po kružnici. Vyjadřuje **úhlovou rychlost rotujícího fázoru okamžité výchylky** $\vec{Y}$, tedy současně **rychlost, s jakou se mění fáze** kmitajícího tělesa M (viz obr.3). Takže definice ω zní:

$$\boxed{\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}} \tag{17}$$

Jednotka je zřejmě s^{-1} (pač $\Delta\varphi$ je v radiánech), což se Hz.

Vztah mezi ω, T a f: Jednomu kmitu tělesa odpovídá jedna otočka fázoru o úhel 2π radiánů za jednu periodu T. Tedy změna fáze je $\Delta\varphi = 2\pi$ a $\Delta t = T$ a po dosazení do (17) dostáváme:

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f} \tag{18}$$

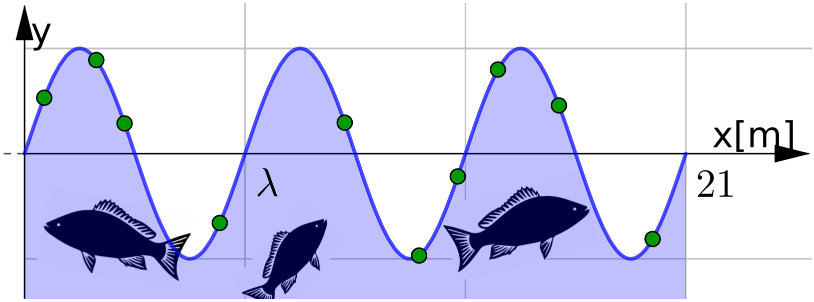
Dosadíme-li do (18) za f z (15), dostáváme také

$$\boxed{\omega = \frac{N \cdot 2\pi}{\Delta t}} \tag{19}$$

Tento vztah pro *úhlový kmitočet* koresponduje se vztahem (15) pro *„obyčejný" kmitočet* a osvětluje vznik divného názvu pro ω – jedná se o *úhlový kmitů počet*. V obrázku 3 se například fázor $\vec{Y}$ otočí $3\times$ dokola ($N = 3$) za dobu $\Delta t = 6\,\mathrm{s}$, takže $\omega = \frac{3 \cdot 2\pi}{6} = \pi[\mathrm{Hz}]$.

3.2 Délka vlny, vlnočet, úhlový vlnočet

Délka vlny λ: (*vlnová délka*) je vzdálenost, do které se rozšíří vlna za dobu jedné periody T (Nebo také vzdálenost dvou nejbližších bodů kmitajících ve fázi).



Obr. 4: Prostorový diagram různých bodů vlny.

Šíří-li se vlna rychlostí c (rychlost, se kterou se šíří *fáze kmitů – fázová* rychlost), dostáváme dle definice (pač dráha je rychlost krát čas):

$$\boxed{\lambda = c \cdot T} \tag{20}$$

Vlnočet σ: (*vlnové číslo*) je počet N vlnových délek λ, které se vejdou do daného úseku vlny Δx, vydělený Δx, tedy je to počet vln připadajících na jednotku délky (srovnej s definicí kmitočtu f):

$$\boxed{\sigma = \frac{N}{\Delta x}} \tag{21}$$

Jednotka je patrná z definice, tedy m^{-1}. V obrázku 4 připadají na délku $\Delta x = 21\,\mathrm{m}$ celkem tři vlnky, tedy $\sigma = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}[\mathrm{m}^{-1}]$

Vztah mezi λ a σ: Vezmeme-li úsek vlny o délce jedné vlnové délky, je $N = 1$ a $\Delta x = \lambda$, dostáváme:

$$\boxed{\sigma = \frac{1}{\lambda}} \tag{22}$$

V obrázku 4 je zřejmě $\lambda = 7\,\mathrm{m}$, takže $\sigma = \frac{1}{7}[\mathrm{m}^{-1}]$ To odpovídá předchozímu výpočtu.

Úhlový vlnočet k: (*úhlové vlnové číslo*) je prostorovou analogií úhlového kmitočtu ω – vyjadřuje změnu fáze kmitání bodů vlny podél osy x – definice je tedy

$$\boxed{k = \frac{\Delta\varphi}{\Delta x}} \tag{23}$$

Jednotka je zřejmě m^{-1}.

Vezmeme-li dva nejbližší body vlny kmitající se stejnou fází, je $\Delta\varphi = 2\pi$ a $\Delta x = \lambda$, takže máme:

$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}} \tag{24}$$

Vidíme, že je to **prostorová** obdoba **časového** vztahu $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Vztah mezi σ a k: Z předchozího vztahu vidíme, že

$$\boxed{k = 2\pi\sigma} \tag{25}$$

Je to obdoba vztahu $\omega = 2\pi f$.

https://en.wikipedia.org/wiki/Wavenumber

https://cs.wikipedia.org/wiki/Vlnov%C3%A9_%C4%8D%C3%ADslo

4 Dvě tváře $\mathcal{ROPOVLN}$

Rovnice postupné vlny pro vlnu postupující **ve směru** osy x

$$y(x,t) = y_m \sin(\omega t - kx)$$

Obr. 5: Dvě tváře boha Januse
https://en.wikipedia.org/wiki/Janus

respektive rovnice pro vlnu postupující **proti směru** osy x

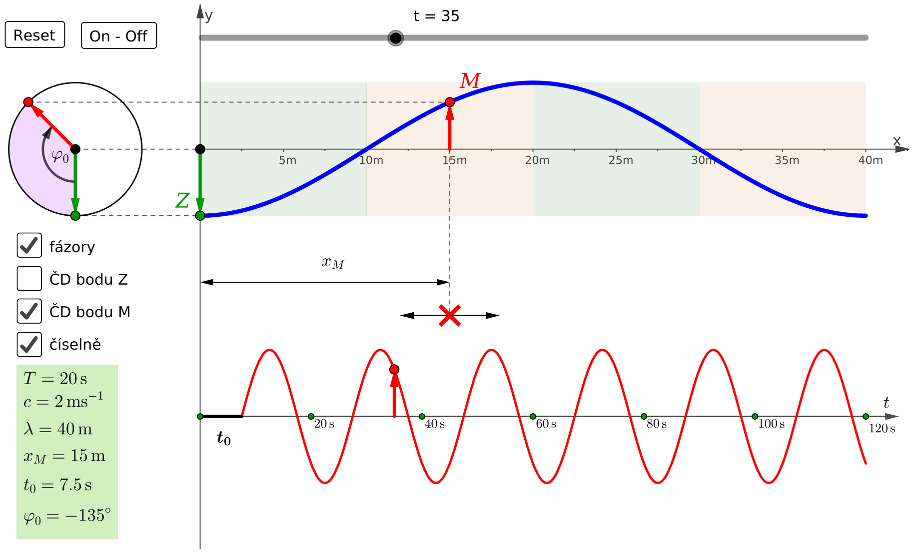
$$y(x,t) = y_m \sin(\omega t + kx)$$

je funkcí dvou proměnných x a t. Je to asi první (a možná poslední – když pominu 3D fázový diagram) funkce dvou proměnných, se kterou se setkáme na střední škole, vole! Takže bychom si jí měli vážit a pěkně se nad ní zamyslet.

Čummež opět na aplet v GeoGebře (viz obr.6 + odkaz na aplet v popisku obrázku).

V apletu vlevo dole vidíme parametry vlny, které dosadíme do obecné rovnice $y(x,t) = y_m \sin(\omega t - kx)$. Akoráth tam není amplituda, tak si ji vymyslíme, třeba $y_m = 0{,}5\,\mathrm{m}$. Dopočítáme ω a k:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{20} = \frac{\pi}{10}[\mathrm{Hz}] \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{40} = \frac{\pi}{20}[\mathrm{m}^{-1}]$$



Obr. 6:

https://www.geogebra.org/m/uqpbdnsr

Rovnice této postupné vlny je tedy:

$$\boxed{y(x,t) = 0,5\sin\left(\frac{\pi}{10}t - \frac{\pi}{20}x\right)}$$

Vhodné je vždy jednu z proměnných **zmrazit** a brát ji jako konstantu. Tím získáme dva různé pohledy na $\mathcal{ROPOVLN}$. Uzříme její **dvě tváře** (viz obr.5), jednu **dynamickou** (časovou), druhou **statickou** (prostorovou).

4.1 Tvář dynamická – časová

Zvolíme nyní x pevné, např. $x = 15\,\mathrm{m}$. Tím vybereme konkrétní bod vlny M a z rovnice se stane funkce pouze **jedné proměnné** t.

$$y(t) = 0,5\sin\left(\frac{\pi}{10}t - \frac{\pi}{20}\cdot 15\right)$$

$$\boxed{y(t) = 0,5\sin\left(\frac{\pi}{10}t - \frac{3\pi}{4}\right)}$$

Dostali jsme **rovnici kmitání bodu** M**, který je ve vzd.** $15\,\mathrm{m}$ od zdroje. V apletu (viz obr.6) vidíme graf této funkce – časový diagram bodu M ve spodní části apletu (červený průběh).

4.2 Tvář statická – prostorová

Zvolíme nyní t pevné, např. $t = 35\,\mathrm{s}$. Z rovnice se stane funkce **jedné proměnné** x. Je to jako bychom vlnu zmrazili v čase a čuměli na ní, tedy je to jako fotka vlny v určitém čase.

$$y(x) = 0,5\sin\left(\frac{\pi}{10}\cdot 35 - \frac{\pi}{20}x\right)$$

$$y(x) = 0,5 \sin\left(\frac{7\pi}{2} - \frac{\pi}{20}x\right)$$

Dostali jsme **rovnici popisující tvar celé vlny** v čase $t = 35\,\mathrm{s}$. V apletu (viz obr.6) vidíme graf této funkce v horní části apletu (modrý průběh).

5 Odvození $\mathcal{ROPOVLN}$ Waltera Lewina

Slavný fysik z MITU odvozuje krástně rovnici vlny v tomto vídeu:

https://youtu.be/D_RIzl1uCxY

Doporučuji!