ชื่อ – สกุล .... ชั้น ม. 4/12 เลขที่.............

1. โครงสร้างทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Structure)

คณิตศาสตร์ (Mathematics) เป็นวิชาที่ว่าด้วยการศึกษาที่เกี่ยวข้องกับ จำนวน (numbers) โครงสร้าง (structures) ปริภูมิ (spaces) และการเปลี่ยนแปลง (changes) โดยทั่วไปแล้วไม่ว่าจะศึกษาคณิตศาสตร์เรื่องใด จะต้องรู้จักกับ โครงสร้างทางคณิตศาสตร์ (Mathematical structure) ซึ่งประกอบไปด้วย องค์ประกอบสำคัญ 4 ส่วน ได้แก่

1. พจน์อนิยาม (undefined term) คือ คำที่คนส่วนใหญ่เข้าใจตรงกันว่าหมายความว่าอย่างไร แต่เกิดความยากลำบากที่จะให้ความหมายรัดกุมจึงไม่มีความจำเป็นต้องอธิบายความหมายอีก เช่น จุด เส้นตรง เซต ระนาบ สมาชิก เป็นต้น พจน์ในลักษณะนี้จำเป็นต้องมีในคณิตศาสตร์ทุกแขนงเพราะการที่จะให้ความหมายของสิ่ง ๆ หนึ่ง จำต้องใช้คำที่ทราบความหมายหรือเข้าใจตรงกันแล้วมาใช้อธิบาย หากไม่มีพจน์ดังกล่าวก็จะไม่มีคำตั้งต้นสำหรับใช้อธิบายความหมายของคำอื่น ๆ ซึ่งก็จะเกิดคำถามถึงความหมายของคำต่าง ๆ อย่างไม่รู้จบ

2. บทนิยาม (definition) คือ การให้ความหมายของคำที่จะใช้ศึกษาในเรื่องใดเรื่องหนึ่ง โดยอาศัยพจน์อนิยามหรือบทนิยามที่กำหนดไว้ก่อนหน้านั้น เช่น รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านเท่ากันสองด้าน บทนิยามที่ดีต้องมีความเป็นสากล และเมื่อกำหนดขึ้นมาแล้วจะต้องไม่มีข้อโต้แย้งใด ๆ

3. สัจพจน์ (axiom) คือ ข้อความที่ตกลงกันว่าเป็นจริง เป็นที่ยอมรับร่วมกันโดยไม่ต้องพิสูจน์ เช่น มีเส้นตรงเพียงเส้นเดียวเท่านั้นที่ผ่านจุดสองจุดที่กำหนดให้

4. ทฤษฎีบท (theorem) คือ ข้อความทางคณิตศาสตร์ที่สามารถพิสูจน์ได้ว่าเป็นจริงเสมอ โดยอาศัยจากทฤษฎีบท บทนิยาม สัจพจน์ และความรู้ทางตรรกศาสตร์และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เข้ามาช่วยในการพิสูจน์ และข้อพิสูจน์นั้นเป็นการอ้างเหตุผลที่สมเหตุสมผล

โครงสร้างทางคณิตศาสตร์เริ่มต้นจากการสังเกตและพิจารณาความจริงในธรรมชาติ จนค้นพบข้อสรุปที่เป็นนามธรรม ซึ่งจะถูกกำหนดในรูป พจน์อนิยาม บทนิยาม และทฤษฎีบท หลังจากนั้นจะใช้ตรรกศาสตร์และการให้เหตุผลต่าง ๆ มาช่วยในการสร้างทฤษฎีบท หรือข้อความรู้ใหม่ และท้ายที่สุดความรู้เหล่านี้อาจนำกลับไปประยุกต์ใช้กับธรรมชาติต่อไปเป็นวัฏจักรเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ

ปัจจุบันนักคณิตศาสตร์ใช้กระบวนการดังกล่าวในการค้นหา หรือสร้างความรู้ใหม่ โดยบางกลุ่มมุ่งที่จะศึกษาความรู้ตามโครงสร้างคณิตศาสตร์โดยไม่ได้ให้ความสำคัญกับการนำไปใช้ เราเรียกการศึกษาคณิตศาสตร์ดังกล่าวว่า **คณิตศาสตร์บริสุทธิ์ (pure mathematics)** เช่น พีชคณิต (algebra) ทอพอโลยี (topology) หรือการวิเคราะห์ (analysis) เป็นต้น ในขณะที่นักคณิตศาสตร์อีกกลุ่มก็ให้ความสำคัญกับการนำความรู้ไปประยุกต์ใช้กับความรู้แขนงต่าง ๆ ซึ่งเราเรียกว่าเป็น **คณิตศาสตร์ประยุกต์ (applied mathematics)** ตัวอย่างหนึ่งของวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คือการนำตรรกศาสตร์เชิงคณิตศาสตร์ (mathematical logic) ไปใช้กับอธิบายวงจรในคอมพิวเตอร์ จนในท้ายที่สุดสามารถพัฒนาจนกระทั่งเป็นพีชคณิตบูลีน (Boolean algebra) อย่างไรก็ตามการศึกษาคณิตศาสตร์ในสองลักษณะที่กล่าวไปข้างต้นมิได้แยกออกจากกันอย่างชัดเจน

2. การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Proof)

การพิสูจน์ เป็นสิ่งสำคัญในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ที่ทำให้เราเห็นว่าทฤษฎีบทต่าง ๆ เป็นจริงโดยใช้อนิยาม บทนิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีบทก่อนหน้าซึ่งเราทราบว่าเป็นจริง และมีเครื่องมือ ทางตรรกศาสตร์ช่วยในการพิสูจน์ ซึ่งนักเรียนควรมีพื้นฐานความรู้เรื่องตรรกศาสตร์มาก่อนแล้ว

ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เมื่อเราพบทฤษฎีบทใด ๆ เราจำเป็นต้องพิสูจน์ก่อนว่า ทฤษฎีบทดังกล่าวเป็นจริง บางทฤษฎีบทได้โดยตรงจากบทนิยาม บางทฤษฎีบทเป็นผลที่ได้มาจากทฤษฎีบทอื่น (เราเรียกว่า บทแทรก) บางทฤษฎีบทเป็นสิ่งที่ช่วยให้การพิสูจน์ทฤษฎีบทอื่นสะดวกขึ้น (เราเรียกว่า บทตั้ง) บางทฤษฎีบทก็ทำให้เราสร้างบทนิยามใหม่ขึ้นมาได้ เทคนิคการแก้โจทย์ คณิตศาสตร์บางข้อก็เป็นสิ่งที่ได้จากกระบวนการพิสูจน์ทฤษฎีบท ด้วยเหตุนี้การพิสูจน์ทฤษฎีบท จึงเป็นสิ่งสำคัญมากในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ที่อย่างน้อยผู้เรียนควรจะพิสูจน์ทฤษฎีบทเบื้องต้นได้

ดังนั้น **การพิสูจน์ (proof)** คือ การแสดงการอ้างเหตุผลที่สมเหตุสมผล กล่าวคือ เมื่อประพจน์ $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \Rightarrow q$ เป็นสัจนิรันดร์ และการที่ทราบว่าประพจน์ใดสมมูลกันจะเป็นประโยชน์ต่อการอ้างเหตุผลอย่างสมเหตุสมผล สำหรับการพิสูจน์ในทางคณิตศาสตร์นั้น เหตุที่นำมาอ้างอิงมาจากทฤษฎีบทที่เคยทราบมาก่อน หรือบทนิยาม หรือสัจพจน์ เป็นต้น แต่มักจะมีปัญหาว่า สัจพจน์ บทนิยาม หรือทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่จะนำมาอ้างอิงเพื่อนำไปสู่ผลสรุปนั้นมีมากมาย เป็นการยากที่จะเลือกใช้ ดังนั้นผู้เรียนควรศึกษาตรรกศาสตร์ และการพิสูจน์หลาย ๆ แบบ เพื่อจะช่วยให้มีทักษะในการพิสูจน์ สามารถเลือกวิธีการพิสูจน์ได้อย่างเหมาะสม ในที่นี้จะกล่าวถึงวิธีการพิสูจน์แบบต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

1. การพิสูจน์ $p \Rightarrow q$ โดยวิธีพิสูจน์ตรง (Direct Proof)
2. การพิสูจน์ $p \Rightarrow q$ โดยวิธีพิสูจน์แบบแย้งสลับที่ (Contrapositive)
3. การพิสูจน์ $p \Leftrightarrow q$ (If and only if)
4. การพิสูจน์โดยการแจงกรณี (Exhaustion)
5. การพิสูจน์การมีเพียงสิ่งเดียว (Uniqueness)
6. การพิสูจน์โดยใช้หลักอุปนัยทางคณิตศาสตร์ (Principle of Mathematic Induction)

ดังที่กล่าวมาแล้วว่า การพิสูจน์ จำเป็นต้องทราบบทนิยามหรือสมบัติบางประการของเรื่องที่จะพิสูจน์ จึงขอทบทวนบทนิยามพื้นฐานและสมบัติบางประการที่จะใช้เป็นตัวอย่าง ในการฝึกการพิสูจน์ ดังนี้

<u>บทนิยาม</u> จำนวนคู่ (Even number) และจำนวนคี่ (Odd number)

สำหรับจำนวนเต็ม a เรากล่าวว่า

a เป็น **จำนวนคู่** ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ที่ทำให้ $a = 2k$ (ประพจน์...)

a เป็น **จำนวนคี่** ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ที่ทำให้ $a = 2k+1$ (ประพจน์...)

ตัวอย่างที่ 1 พิจารณาจำนวนต่อไปนี้ว่าเป็นจำนวนคู่หรือจำนวนคี่ พร้อมให้เหตุผลประกอบ

1) 15 เป็นจำนวนคี่ เพราะว่า มี $7 \in \mathrm{I}$ ที่ทำให้ $15 = 2(7)+1$

2) 20 เป็นจำนวนคู่ เพราะว่า มี $10 \in \mathrm{I}$ ที่ทำให้ $20 = 2(10)$

3) ....

4) ....

5) ....

6) ....

<u>บทนิยาม</u> การหารลงตัว (Divisible)

กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม โดย $a \neq 0$ เรากล่าวว่า

a **หาร** b **ลงตัว** ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ที่ทำให้ $b = ak$ (ประพจน์...)

และใช้สัญลักษณ์ $a|b$ แทน a หาร b ลงตัว และเรียก a ว่า **ตัวหาร** ของ b

ตัวอย่างที่ 2 พิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่า “ถูก” หรือ “ผิด” พร้อมให้เหตุผลประกอบ

1) **3 | 27** <u>ตอบ</u> ถูก เพราะว่า มี $9 \in \mathrm{I}$ ที่ทำให้ $27 = 3(9)$

2) **$5 \nmid 35$** <u>ตอบ</u> ผิด เพราะว่า มี $7 \in \mathrm{I}$ ที่ทำให้ $35 = 5(7)$ ดังนั้น $5|35$

3) **$3 \nmid 35$** <u>ตอบ</u> ถูก เพราะว่า ไม่มี $k \in \mathrm{I}$ ที่ทำให้ $35 = 3k$

4) .... <u>ตอบ</u>..

5) .... <u>ตอบ</u>..

6) .... <u>ตอบ</u>..

7) .... <u>ตอบ</u>..

8) .... <u>ตอบ</u>..

<u>บทนิยาม</u> จำนวนเฉพาะ (Prime number) และจำนวนประกอบ (Composite number)

กำหนดให้ a,b เป็นจำนวนนับ เรากล่าวว่า

a เป็น **จำนวนเฉพาะ** ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม 1 และ a เท่านั้นที่หาร a ลงตัว

b เป็น **จำนวนประกอบ** ก็ต่อเมื่อ b ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ

<u>ข้อสังเกต:</u> จากบทนิยามข้างต้น จะได้ว่า b เป็นจำนวนประกอบ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนนับ k ที่ทำให้ $k|b$ โดยที่ $k \neq 1$ และ $k \neq b$

<u>สมบัติของจำนวนจริง</u> ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

สมบัติการเท่ากันของจำนวนจริง

1) **สมบัติการสะท้อน** $a = a$

2) **สมบัติการสมมาตร** ถ้า $a = b$ แล้ว $b = a$

3) **สมบัติการถ่ายทอด** ถ้า $a = b$ และ $b = c$ แล้ว $a = c$

4) **สมบัติของการบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน** ถ้า $a = b$ แล้ว $a + c = b + c$

5) **สมบัติการคูณด้วยจำนวนที่เท่ากัน** ถ้า $a = b$ แล้ว $ac = bc$

สมบัติของการบวกในระบบจำนวนจริง

1) **สมบัติปิดของการบวก** $a + b$ เป็นจำนวนจริง

2) **สมบัติการสลับที่ของการบวก** $a + b = b + a$

3) **สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มของการบวก** $a + (b + c) = (a + b) + c$

4) **เอกลักษณ์การบวก** $\because\ 0 + a = a = a + 0$

นั่นคือ ในระบบจำนวนจริง จะมี 0 เป็นเอกลักษณ์การบวก

5) **อินเวอร์สการบวก** $\because a + (-a) = 0 = (-a) + a$

นั่นคือ ในระบบจำนวนจริง จำนวนจริง a จะมี $-a$ เป็นอินเวอร์สของการบวก

สมบัติของการคูณในระบบจำนวนจริง

1) **สมบัติปิดของการคูณ** ab เป็นจำนวนจริง

2) **สมบัติการสลับที่ของการคูณ** $ab = ba$

3) **สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มของการคูณ** $a(bc) = (ab)c$

4) **เอกลักษณ์การคูณ** $\because\ 1 \cdot a = a = a \cdot 1$

นั่นคือ ในระบบจำนวนจริงมี 1 เป็นเอกลักษณ์การคูณ

5) **อินเวอร์สการคูณ** $\because\ a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a$

นั่นคือ ในระบบจำนวนจริง จำนวนจริง a จะมี a^{-1} เป็นอินเวอร์สการคูณ

6) **สมบัติของการแจกแจง** $a(b + c) = ab + ac$

$$(b + c)a = ba + ca$$

<u>บทนิยาม</u> การลบจำนวนจริง

เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ว่า $a-b=a+(-b)$

นั่นคือ $a-b$ คือ ผลบวกของ a กับอินเวอร์สการบวกของ b

<u>บทนิยาม</u> การหารจำนวนจริง

เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $b \neq 0$ จะได้ว่า $\frac{a}{b}=a\left(b^{-1}\right)$

นั่นคือ $\frac{a}{b}$ คือ ผลคูณของ a กับอินเวอร์สการคูณของ b

1. การพิสูจน์ $p \Rightarrow q$ โดยวิธีพิสูจน์ตรง (Direct Proof)

เนื่องจากข้อความในรูป $p \Rightarrow q$ เป็นเท็จกรณีเดียว คือ เมื่อ p เป็นจริง และ q เป็นเท็จ จึงเป็นการเพียงพอที่จะพิสูจน์ว่า $p \Rightarrow q$ เป็นจริง โดยการสมมติให้ p เป็นจริง แล้วพยายามแสดง ให้เห็นว่า q ต้องเป็นจริง เราก็จะสรุปได้ว่า $p \Rightarrow q$ เป็นจริง

โครงสร้างการพิสูจน์ประพจน์ $p \Rightarrow q$ โดยวิธีพิสูจน์ตรง (Direct Proof)

สมมติ p [จะแสดงว่า q นั้นคือ ตีความหมายของ q ให้อยู่ในรูปข้อความทางคณิตศาสตร์]

$\vdots$

(นำคุณสมบัติของ p : สัจพจน์, บทนิยาม, ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องมาสนับสนุนในการพิสูจน์)

$\vdots$

จะได้ว่า q

ดังนั้น " $p \Rightarrow q$ " เป็นจริง

ตัวอย่างที่ 3 ให้ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จงพิสูจน์ว่า ถ้า n เป็นจำนวนคี่ แล้ว $n+2$ เป็นจำนวนคี่

<u>พิสูจน์</u> ให้ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

สมมติ............................ [จะแสดงว่า $n+2$ เป็นจำนวนคี่ นั่นคือ..]

โดยบทนิยามของ.................... จะได้ว่า n = ... สำหรับบาง $m \in \mathrm{I}$

พิจารณา n = ...

.... = ... (สมบัติ..)

.... = ... (สมบัติ..)

.... = ... (สมบัติ..)

.... = ... (สมบัติ..)

$n+2 = 2(m+1)+1$ (สมบัติ..)

เนื่องจาก $m \in \mathrm{I}$ และ $1 \in \mathrm{I}$ โดยสมบัติ.................................. ทำให้ $m+1 \in \mathrm{I}$

ให้ $k = m+1$; $n+2 = 2k+1$ สำหรับบาง $k \in \mathrm{I}$

โดยบทนิยามของ......................... จะได้ว่า $n+2$ เป็นจำนวนคี่

ดังนั้น "ถ้า n เป็นจำนวนคี่ แล้ว $n+2$ เป็นจำนวนคี่" เป็นจริง #

<u>แบบฝึกหัดที่ 1.1</u>

1) ให้ a เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า ถ้า a เป็นจำนวนคี่ แล้ว a^2 เป็นจำนวนคี่

<u>พิสูจน์</u> ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2) จงพิสูจน์ว่า สำหรับจำนวนเต็ม b ใด ๆ ถ้า b เป็นจำนวนคู่ แล้ว b^2 เป็นจำนวนคู่

<u>พิสูจน์</u> ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3) ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า ถ้า a เป็นจำนวนคู่ แล้ว $a+2b$ เป็นจำนวนคู่

พิสูจน์ ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

4) ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

จงพิสูจน์ว่า ถ้า a และ b เป็นจำนวนคู่ แล้ว $3a-b$ เป็นจำนวนคู่

พิสูจน์ ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

5) ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า ถ้า a เป็นจำนวนคี่ แล้ว a^2+4b+1 เป็นจำนวนคู่

<u>พิสูจน์</u> ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

6) ให้ x เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า ถ้า $x+3$ เป็นจำนวนคู่ แล้ว x เป็นจำนวนคี่

<u>พิสูจน์</u> ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่างที่ 4 ให้ a,b และ c เป็นจำนวนเต็มใด ๆ ที่ไม่เป็นศูนย์ จงพิสูจน์ว่า ถ้า $a|b$ แล้ว $a|bc$

พิสูจน์ ให้ ....

สมมติ .... [จะแสดงว่า..................... นั่นคือ........................... $;\exists k \in \mathrm{I}$]

โดยบทนิยามของ........................... จะได้ว่า $b=$................. สำหรับบาง $m \in \mathrm{I}$

พิจารณา $b = am$

.... $=$ ....

.... $= a(mc)$ สำหรับบาง ....

ให้ $k = mc$; .... $= ak$ สำหรับบาง $k \in \mathrm{I}$

โดยบทนิยามของ........................... จะได้ว่า $a|bc$

ดังนั้น “..” เป็นจริง #

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้ a,b และ c เป็นจำนวนเต็มใด ๆ ที่ไม่เป็นศูนย์

จงพิสูจน์ว่า ถ้า $a|b$ และ $b|c$ แล้ว $a|c$

พิสูจน์ ให้ a,b และ c เป็นจำนวนเต็มใด ๆ ที่ไม่เป็นศูนย์

สมมติ .... [จะแสดงว่า $a|c$ นั่นคือ................... $;\exists k \in \mathrm{I}$]

โดยบทนิยามของ...............................จะได้ ....จะได้ว่า $b = am$ สำหรับบาง ....$\in \mathrm{I}$

และ..........จะได้ว่า $c = bn$ สำหรับบาง ....$\in \mathrm{I}$

พิจารณา $c = bn$

$c =$ ....

$c =$ .... สำหรับบาง ....$\in \mathrm{I}$

ให้ $k =$...........; $c = ak$ สำหรับบาง $k \in \mathrm{I}$

โดยบทนิยามของ............................... จะได้ว่า..............................

ดังนั้น “ถ้า $a|b$ และ $b|c$ แล้ว $a|c$” เป็นจริง #

<u>แบบฝึกหัดที่ 1.2</u>

1) ให้ a,b และ c เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นศูนย์ จงพิสูจน์ว่า ถ้า $a|b$ แล้ว $ac|bc$

<u>พิสูจน์</u>...
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2) ให้ a,b และ c เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นศูนย์ จงพิสูจน์ว่า ถ้า $ac|bc$ แล้ว $a|b$

<u>พิสูจน์</u>...
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

3) ให้ a,b,c และ d เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นศูนย์ จงพิสูจน์ว่า ถ้า $a|b$ และ $c|d$ แล้ว $ac|bd$

<u>พิสูจน์</u>..
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

4) ให้ a,b และ c เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นศูนย์ จงพิสูจน์ว่า
ถ้า $a|b$ และ $a|c$ แล้ว $a|(bx+cy)$ สำหรับจำนวนเต็ม x และ y

<u>พิสูจน์</u>..
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

ลองทำดู :

1) ให้ a เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จงพิสูจน์ว่า ถ้า a^2+3a-1 เป็นจำนวนคู่ แล้ว a เป็นจำนวนคี่

<u>พิสูจน์</u>..
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2) ให้ a เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า
ถ้า 4 หาร a^2-1 ไม่ลงตัว โดยที่ $a \neq 0$ แล้ว a เป็นจำนวนคู่

<u>พิสูจน์</u>..
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2. การพิสูจน์ $p \Rightarrow q$ โดยวิธีพิสูจน์แบบแย้งสลับที่ (Contrapositive)

เนื่องจาก $p \to q \equiv \sim q \to \sim p$ ถ้าพิสูจน์ได้ว่า $\sim q \to \sim p$ เป็นจริง จะทำให้ได้ว่า $p \to q$ เป็นจริงด้วย ซึ่งในบางครั้งเป็นการง่ายกว่าการพิสูจน์ $p \to q$ โดยการพิสูจน์ตรง

โครงสร้างการพิสูจน์ประพจน์ $p \Rightarrow q$ โดยใช้การแย้งสลับที่ (Contrapositive)

<u>รูปแบบ</u> สมมติ $\sim q$ [จะแสดงว่า $\sim p$ นั่นคือ...]

$\vdots$

จะได้ว่า $\sim p$

ดังนั้น " $\sim q \to \sim p$ " เป็นจริง

โดยการพิสูจน์แบบแย้งสลับที่ จะได้ว่า

" $p \to q$ " เป็นจริง

ตัวอย่างที่ 6 กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จงพิสูจน์ว่า ถ้า a^2 เป็นจำนวนคี่ แล้ว a เป็นจำนวนคี่

<u>พิสูจน์</u> [จะพิสูจน์แบบ...]

<u>แนวคิด</u> ให้ p แทน " a^2 เป็นจำนวนคี่" จะได้ $\sim p$ แทน ".."

ให้ q แทน " a เป็นจำนวนคี่" จะได้ $\sim q$ แทน ".."

เนื่องจาก $p \to q \equiv \sim q \to \sim p$

ดังนั้น จะพิสูจน์ว่า ".." แทน

ให้ a เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

สมมติ....................................... [จะแสดงว่า a^2 เป็นจำนวน........ นั่นคือ...................................]

โดยบทนิยามของ............................. จะได้ว่า $a =$.............. $; \exists m \in \mathrm{I}$

พิจารณา $a =$............

$a^2 = (........)^2$

$a^2 =$..............

$a^2 = 2(.........)$ สำหรับบาง $2m^2 \in \mathrm{I}$ และให้ .... $= 2m^2$;

$a^2 =$.............. สำหรับบาง................

โดยบทนิยามของ........................... จะได้ว่า a^2 เป็นจำนวน........

ดังนั้น "..." เป็นจริง

โดยการพิสูจน์แบบ........................... จะได้ว่า

"..." เป็นจริง #

<u>แบบฝึกหัดที่ 2</u>

1) ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จงพิสูจน์ว่า ถ้า $3a$ เป็นจำนวนคู่ แล้ว a เป็นจำนวนคู่

พิสูจน์ [จะพิสูจน์แบบ...]

แนวคิด ให้ p แทน “ $3a$ เป็นจำนวนคู่ ” จะได้ $\sim p$ แทน “...”

ให้ q แทน “...” จะได้ $\sim q$ แทน “...”

เนื่องจาก $p \to q \equiv \sim q \to \sim p$

ดังนั้น จะพิสูจน์ว่า “...” แทน

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2) ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มใด ๆ ถ้า 4 หาร a^2-1 ไม่ลงตัว โดยที่ $a \neq 0$ แล้ว a เป็นจำนวนคู่

พิสูจน์ [จะพิสูจน์แบบ...]

แนวคิด ให้ p แทน “..”

จะได้ $\sim p$ แทน “..”

ให้ q แทน “..”

จะได้ $\sim q$ แทน “..”

เนื่องจาก $p \to q \equiv$ ....

ดังนั้น จะพิสูจน์ว่า “..” แทน

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3) ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มใด ๆ ถ้า $(a+b)^2$ เป็นจำนวนคู่ แล้ว a เป็นจำนวนคู่ หรือ b เป็นจำนวนคี่

พิสูจน์ [....]

แนวคิด ให้ p แทน "..."

จะได้ $\sim p$ แทน "..."

ให้ q แทน "..."

จะได้ $\sim q$ แทน "..."

เนื่องจาก ....

ดังนั้น จะพิสูจน์ว่า ".." แทน

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

4) ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มใด ๆ ถ้า a^2+3a-1 เป็นจำนวนคู่ แล้ว a เป็นจำนวนคี่

พิสูจน์ ....

3. การพิสูจน์ $p \Leftrightarrow q$ (If and only if)

เนื่องจาก $p \leftrightarrow q$ สมมูลกับ $(p \to q) \wedge (q \to p)$ ดังนั้น ในการพิสูจน์ $p \leftrightarrow q$ มีรูปแบบดังนี้

โครงสร้างการพิสูจน์ $p \Leftrightarrow q$ (If and only if)

$(\Rightarrow)$ จะต้องพิสูจน์ว่า $p \to q$

(โดยวิธีพิสูจน์ตรง (Direct Proof) หรือวิธีพิสูจน์แบบแย้งสลับที่ (Contrapositive) ก็ได้)

$\vdots$

$(\Leftarrow)$ จะต้องพิสูจน์ว่า $q \to p$

(โดยวิธีพิสูจน์ตรง (Direct Proof) หรือวิธีพิสูจน์แบบแย้งสลับที่ (Contrapositive) ก็ได้)

$\vdots$

จาก $(\Rightarrow)$ และ $(\Leftarrow)$ สรุปได้ว่า " $p \leftrightarrow q$ " เป็นจริง

ตัวอย่างที่ 7 ให้ a เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จงพิสูจน์ว่า a เป็นจำนวนคี่ ก็ต่อเมื่อ a^2 เป็นจำนวนคี่

แนวคิด จะพิสูจน์ว่า 1) ถ้า a เป็นจำนวนคี่ แล้ว a^2 เป็นจำนวนคี่

2) ถ้า a^2 เป็นจำนวนคี่ แล้ว a เป็นจำนวนคี่

พิสูจน์ ให้ a เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

$(\Rightarrow)$ จะต้องพิสูจน์ว่า...

สมมติ a เป็นจำนวนคี่ [จะแสดงว่า a^2 เป็นจำนวนคี่ นั่นคือ..]

โดยบทนิยามของ.................... จะได้ว่า $a =$...................... สำหรับบาง $m \in \mathrm{I}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....
....
....
....
....

$(\Leftarrow)$ จะต้องพิสูจน์ว่า..

[จะพิสูจน์แบบ..]

แนวคิด ให้ p แทน " a^2 เป็นจำนวนคี่" จะได้ $\sim p$ แทน "..."
ให้ q แทน " a เป็นจำนวนคี่" จะได้ $\sim q$ แทน "..."
เนื่องจาก $p \to q \equiv \sim q \to \sim p$
ดังนั้น จะพิสูจน์ว่า "..." แทน

สมมติ....................................... [จะแสดงว่า a^2 เป็นจำนวน........ นั่นคือ..................................]

โดยบทนิยามของ............................. จะได้ว่า $a =$.............. สำหรับบาง $n \in \mathrm{I}$

พิจารณา $a =$............

$a^2 = (........)^2$

$a^2 =$.............

$a^2 = 2(.........)$ สำหรับบาง $2m^2 \in \mathrm{I}$ และให้ ....$= 2m^2$;

$a^2 =$.............. สำหรับบาง................

โดยบทนิยามของ.......................... จะได้ว่า a^2 เป็นจำนวน........

ดังนั้น "..." เป็นจริง

โดยการพิสูจน์แบบ.......................... จะได้ว่า

"..." เป็นจริง

จาก $(\Rightarrow)$ และ $(\Leftarrow)$ สรุปได้ว่า " a เป็นจำนวนคี่ ก็ต่อเมื่อ a^2 เป็นจำนวนคี่" เป็นจริง

<u>แบบฝึกหัดที่ 3</u>

1) ให้ a เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จงพิสูจน์ว่า $3a+1$ เป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อ $5a-2$ เป็นจำนวนคี่

<u>แนวคิด</u> จะพิสูจน์ว่า 1) ....

2) ....

<u>พิสูจน์</u> ให้ ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2) ให้ a เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จงพิสูจน์ว่า a เป็นจำนวนคี่ ก็ต่อเมื่อ a^3 เป็นจำนวนคี่

แนวคิด จะพิสูจน์ว่า 1) ....

2) ....

พิสูจน์ ให้ ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3) ให้ a เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จงพิสูจน์ว่า a เป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อ $4 \mid a^2$

แนวคิด จะพิสูจน์ว่า 1) ....

2) ....

พิสูจน์ ให้ ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

4. การพิสูจน์โดยการแจงกรณี (Exhaustion)

เนื่องจาก $(p_1 \vee p_2) \to q \equiv (p_1 \to q) \wedge (p_2 \to q)$ ถ้าพิสูจน์ได้ว่า $(p_1 \vee p_2) \to q$ เป็นจริง จะทำให้ได้ว่า $(p_1 \to q) \wedge (p_2 \to q)$ เป็นจริงด้วย (ในบางครั้ง ข้อความที่ให้มาจะอยู่ในรูป $p \to q$ ซึ่งเราจะต้องพิจารณาให้ดีว่าประพจน์ p ที่ให้มานั้น สามารถแบ่งออกเป็นกรณีใดได้บ้าง)

โครงสร้างการพิสูจน์ประพจน์ $(p_1 \vee p_2) \Rightarrow q$ โดยการแจงกรณี (Exhaustion)

เปรียบเสมือนกับการแยกการพิสูจน์ออกเป็นกรณีย่อย 2 กรณี คือ

<u>รูปแบบ</u> $(p_1 \vee p_2) \Rightarrow q$

กรณีที่ 1 สมมติ p_1 เป็นจริง แล้วพิสูจน์ให้ได้ว่า q เป็นจริง

กรณีที่ 2 สมมติ p_2 เป็นจริง แล้วพิสูจน์ให้ได้ว่า q เป็นจริง

จากกรณีที่ 1 **และ** กรณีที่ 2 จะได้ว่า “$(p_1 \vee p_2) \Rightarrow q$” เป็นจริง

การพิสูจน์โดยการแจงกรณีสามารถนำไปใช้ได้กับข้อความที่มีมากกว่า 2 กรณีได้ กล่าวคือ

ถ้าต้องการพิสูจน์ว่า $(p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee \cdots \vee p_n) \Rightarrow q$ เป็นจริง

เราจะต้องพิสูจน์ว่า $(p_1 \Rightarrow q) \wedge (p_2 \Rightarrow q) \wedge (p_3 \Rightarrow q) \wedge \cdots \wedge (p_n \Rightarrow q)$ เป็นจริง

ตัวอย่างที่ 7 จงพิสูจน์ว่า $n^2 + n$ เป็นจำนวนคู่ สำหรับจำนวนเต็ม n ใด ๆ

<u>พิสูจน์</u> ให้ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

สมมติ .... หรือ ....

[จะแสดงว่า.. นั่นคือ...]

<u>กรณีที่ 1</u> สมมติ n เป็นจำนวนคู่

โดยบทนิยามของจำนวนคู่ จะได้ว่า ....

พิจารณา $n = 2m$

$$n^2 = (2m)^2$$

$$n^2 + n = 4m^2 + 2m$$

$$n^2 + n = 2(2m^2 + m)$$ สำหรับบาง $2m^2 + m \in \mathrm{I}$

ให้ $k_1 = 2m^2 + m$ จะได้ว่า $n^2 + n = 2k_1$ สำหรับบาง $k_1 \in \mathrm{I}$

โดยบทนิยามของจำนวน............ จะได้ว่า ....

ดังนั้น ถ้า .... แล้ว ....

<u>กรณีที่ 2</u> สมมติ n เป็นจำนวนคี่

โดยบทนิยามของจำนวนคี่ จะได้ว่า ....

พิจารณา $n = 2p + 1$

$$n^2 = (2p+1)^2$$

$n^2+n=\left(4p^2+4p+1\right)+\left(2p+1\right)$

$n^2+n=4p^2+6p+2$

$n^2+n=2\left(2p^2+3p+1\right)$ สำหรับบาง $2p^2+3p+1\in \mathrm{I}$

ให้ $k_2=2p^2+3p+1$ จะได้ว่า $n^2+n=2k_2$ สำหรับบาง $k_2\in \mathrm{I}$

โดยบทนิยามของจำนวน............. จะได้ว่า ....

ดังนั้น ถ้า .... แล้ว ....

จากกรณีที่ 1 **และ** กรณีที่ 2 จะได้ว่า “ n^2+n เป็นจำนวนคู่ สำหรับจำนวนเต็ม n ใด ๆ” เป็นจริง

แบบฝึกหัดที่ 4

1) จงพิสูจน์ว่า a^2-a เป็นจำนวนคู่ สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ

พิสูจน์ ให้ a เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

สมมติ .... หรือ ....

[จะแสดงว่า.. นั่นคือ...]

กรณีที่ 1 สมมติ ....

โดยบทนิยามของ............................. จะได้ว่า ....

พิจารณา...

....

....

....

....

....

....

กรณีที่ 2 สมมติ ....

โดยบทนิยามของ............................. จะได้ว่า ....

พิจารณา...

....

....

....

....

....

....

....

2) จงพิสูจน์ว่า ถ้า a เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $3a+a^2$ เป็นจำนวนคู่

<u>พิสูจน์</u> สมมติ a เป็นจำนวนเต็ม

จะได้ว่า .... หรือ ....

[จะแสดงว่า.. นั่นคือ..]

<u>กรณีที่ 1</u> สมมติ ....

โดยบทนิยามของ................................ จะได้ว่า ....

พิจารณา..

....

....

....

....

....

....

....

....

....

<u>กรณีที่ 2</u> สมมติ ....

โดยบทนิยามของ................................ จะได้ว่า ....

พิจารณา..

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

จากกรณีที่ 1 **และ** 2 จะได้ว่า “...” เป็นจริง

3) สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ จงพิสูจน์ว่า a^2-3a+5 เป็นจำนวนคี่

<u>พิสูจน์</u>..
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

4) ให้ a,b และ c เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นศูนย์ จงพิสูจน์ว่า ถ้า $a|b$ หรือ $a|c$ แล้ว $a|bc$

พิสูจน์

5. การพิสูจน์การมีเพียงสิ่งเดียว (Uniqueness)

ให้ $P(x)$ เป็นข้อความที่เกี่ยวข้องกับตัวแปร x และ U แทน เอกภพสัมพัทธ์

ข้อความที่กล่าวว่า “มี x ที่ทำให้ $P(x)$ เป็นจริง” เขียนแทนด้วย

$$\exists x\left[P(x)\right] \text{ เมื่อ } x \in U$$

ข้อความที่กล่าวว่า “มี x เพียงตัวเดียว ที่ทำให้ $P(x)$ เป็นจริง” เขียนแทนด้วย

$$\exists! x\left[P(x)\right] \text{ เมื่อ } x \in U$$

โครงสร้างการพิสูจน์การมีเพียงสิ่งเดียว (Uniqueness)

ในการพิสูจน์การมีเพียงสิ่งเดียว $\exists! x\left[P(x)\right]$ จะต้องพิสูจน์ 2 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 พิสูจน์สิ่งที่มีจริง $\exists x \in U\left[P(x)\right]$ เป็นจริง

นั่นคือ มี x ใน U ที่ทำให้ $P(x)$ เป็นจริง

ขั้นที่ 2 พิสูจน์สิ่งที่มีจริงเพียงสิ่งเดียว $\forall x \in U \forall y \in U\left[\left(P(x) \wedge P(y)\right) \Rightarrow \left(x = y\right)\right]$

นั่นคือ ให้ $x, y \in U$ ที่ทำให้ $P(x)$ และ $P(y)$ เป็นจริง [จะแสดงว่า $x = y$]

ตัวอย่างที่ 8 จงพิสูจน์ว่า มีจำนวนนับ n เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น ที่ทำให้ $n^2 = 4$

<u>พิสูจน์</u> [จะพิสูจน์การมีเพียงสิ่งเดียว]

ขั้นที่ 1 พิสูจน์สิ่งที่มีจริง $\exists n \in \mathbb{N}\left[n^2 = 4\right]$ เป็นจริง

เลือก $n = 2$ จะได้ว่า $n \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $n^2 = 2^2 = 4$ เป็นจริง

ขั้นที่ 2 พิสูจน์สิ่งที่มีจริงเพียงสิ่งเดียว $\forall n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N}\left[\left(n^2 = 4 \wedge m^2 = 4\right) \Rightarrow \left(n = m\right)\right]$

ให้ $n, m \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $n^2 = 4$ และ $m^2 = 4$ [จะแสดงว่า $n = m$]

พิจารณา $n^2 - m^2 = 0$

$\left(n - m\right)\left(n + m\right) = 0$

จะได้ว่า $n - m = 0$ หรือ $n + m = 0$

เนื่องจาก $n, m \in \mathbb{N}$ ทำให้ $n + m > 0$

จะได้ว่า $n - m = 0$ ดังนั้น $n = m$

จากขั้นที่ 1 และขั้นที่ 2 จะได้ว่า “มีจำนวนนับ n เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น ที่ทำให้ $n^2 = 4$” เป็นจริง

<u>แบบฝึกหัดที่ 5</u>

1) จงพิสูจน์ว่า มีจำนวนนับ x เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น ที่ทำให้ $x^2+3x-10=0$

<u>พิสูจน์</u> [จะพิสูจน์...]

ขั้นที่ 1 พิสูจน์สิ่งที่มีจริง..

....

ขั้นที่ 2 พิสูจน์สิ่งที่มีจริงเพียงสิ่งเดียว...

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2) จงพิสูจน์ว่า สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ จะมีจำนวนเต็ม b เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น ที่ทำให้ $a+b+2=1$

<u>พิสูจน์</u> [จะพิสูจน์...]

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

6. การพิสูจน์โดยใช้หลักการอุปนัยทางคณิตศาสตร์ (Principle of Mathematic Induction)

การพิสูจน์โดยใช้หลักอุปนัยทางคณิตศาสตร์ เป็นการพิสูจน์ข้อความที่เกี่ยวกับจำนวนนับ บางครั้งเราจะพบข้อความในรูป $\forall n \in \mathbb{N}[P(n)]$ ซึ่งการพิสูจน์ข้อความในรูปดังกล่าวต้องอาศัยสิ่งที่เรียกว่า หลักอุปนัยทางคณิตศาสตร์ มีรายละเอียดดังนี้

หลักอุปนัยทางคณิตศาสตร์ (Principle of Mathematic Induction)

ให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $P(n)$ เป็นประโยคเปิดที่มี n เป็นตัวแปร

ถ้า 1) $P(1)$ เป็นจริง

และ 2) สำหรับจำนวนนับ k ใด ๆ ถ้า $P(k)$ เป็นจริง แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง

แล้ว สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ $P(n)$ เป็นจริง

การเขียนพิสูจน์ตามหลักอุปนัยทางคณิตศาสตร์ สำหรับข้อความในรูป $\forall n \in \mathbb{N}[P(n)]$ จึงแบ่งขั้นตอนการพิสูจน์ออกเป็น 2 ขั้นตอน ดังนี้

โครงสร้างการพิสูจน์โดยใช้หลักอุปนัยทางคณิตศาสตร์ (Principle of Mathematic Induction)

ขั้นที่ 1 พิสูจน์ว่า $P(1)$ เป็นจริง

ขั้นที่ 2 พิสูจน์ว่า ให้ $k \in \mathbb{N}$ ถ้า $P(k)$ เป็นจริง แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง

ตัวอย่างที่ 9 จงพิสูจน์ว่า $2+4+6+\cdots+2n = n(n+1)$ สำหรับทุกจำนวนนับ n

พิสูจน์ [จะพิสูจน์โดยใช้หลักอุปนัยทางคณิตศาสตร์]

ให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $P(n)$ แทนข้อความ “ $2+4+6+\cdots+2n = n(n+1)$ ”

ขั้นที่ 1 พิจารณา $n=1$ จะได้

$$\begin{aligned} 2(1) &= 1(1+1) \\ 2 &= 1(2) \\ 2 &= 2 \end{aligned}$$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ขั้นที่ 2 ให้ $k \in \mathbb{N}$

สมมติ $P(k)$ เป็นจริง จะได้ว่า $2+4+6+\cdots+2k = k(k+1)$ เป็นจริง

[จะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง นั่นคือ $2+4+6+\cdots+2k+2(k+1) = (k+1)((k+1)+1)$]

พิจารณา $2+4+6+\cdots+2k = k(k+1)$

$$\begin{aligned} 2+4+6+\cdots+2k+2(k+1) &= k(k+1)+2(k+1) \\ &= k^2+k+2k+2 \\ &= k^2+3k+2 \\ &= (k+1)(k+2) \\ &= (k+1)[(k+1)+1] \end{aligned}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยทางคณิตศาสตร์ จะได้ $P(n)$ เป็นจริงสำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$

นั่นคือ $2+4+6+\cdots+2n = n(n+1)$ สำหรับทุกจำนวนนับ n #

ตัวอย่างที่ 10 จงใช้อุปนัยทางคณิตศาสตร์พิสูจน์ว่า $2^n < 2^{n+1}$ สำหรับทุกจำนวนนับ n

พิสูจน์ [จะพิสูจน์โดยใช้หลักอุปนัยทางคณิตศาสตร์]

ให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $P(n)$ แทนข้อความ “ $2^n < 2^{n+1}$ ”

ขั้นที่ 1 พิจารณา $n=1$ จะได้ $2^1 < 2^{1+1}$

$$2 < 4$$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ขั้นที่ 2 ให้ $k \in \mathbb{N}$

สมมติ $P(k)$ เป็นจริง จะได้ว่า $2^k < 2^{k+1}$ เป็นจริง

[จะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง นั่นคือ $2^{k+1} < 2^{(k+1)+1}$]

พิจารณา $2^k < 2^{k+1}$

$$2 \cdot 2^k < 2 \cdot 2^{k+1}$$

$$2^{k+1} < 2^{(k+1)+1}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยทางคณิตศาสตร์ จะได้ $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$

นั่นคือ $2^n < 2^{n+1}$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ #

<u>แบบฝึกหัดที่ 6</u>

1) จงพิสูจน์ว่า $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

<u>พิสูจน์</u> [จะพิสูจน์โดยใช้หลักอุปนัยทางคณิตศาสตร์]

ให้ $n\in\mathbb{N}$ และ $P(n)$ แทนข้อความ..

ขั้นที่ 1 พิจารณา $n=1$ จะได้ ....

....

....

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ขั้นที่ 2 ให้ $k\in\mathbb{N}$

สมมติ $P(k)$ เป็นจริง จะได้ว่า ....

[จะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง นั่นคือ ....]

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2) สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n จงพิสูจน์ว่า $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

<u>พิสูจน์</u> [จะพิสูจน์...]

ให้ $n\in\mathbb{N}$ และ $P(n)$ แทนข้อความ..

ขั้นที่ 1 พิจารณา $n=1$ จะได้ ....

....

....

....

....

ดังนั้น ....

ขั้นที่ 2 ให้ $k\in\mathbb{N}$

สมมติ $P(k)$ เป็นจริง จะได้ว่า ....

[จะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง นั่นคือ ....]

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3) สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n จงพิสูจน์ว่า $1+5+5^2+\cdots+5^{n-1}=\frac{1}{4}\left(5^n-1\right)$

<u>พิสูจน์</u> [จะพิสูจน์..]

ให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $P(n)$ แทนข้อความ..

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

4) จงพิสูจน์ว่า $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

<u>พิสูจน์</u> [จะพิสูจน์..]

5) จงใช้อุปนัยทางคณิตศาสตร์พิสูจน์ว่า $3^n \geq 1+2n$ สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

<u>พิสูจน์</u>...