Teoría – Tema 5

Teoría - 8 - cociente de polinomios con mezcla en tipos de soluciones

Grado del numerador P(x) menor que Grado del denominador Q(x) con mezcla en el tipo de raíces

El caso más importante a nivel de Bachillerato en el caso de mezcla de tipos de solución es cuando aparece en el denominador Q(x) raíces simples y múltiples.

Debemos descomponer el cociente de polinomios planteando los coeficientes indeterminados que estudiamos para raíces simples y para raíces múltiples.

Ejemplo 1 resuelto

Resuelve $\int \frac{3x+7}{x^3-x^2-x+1}dx$

$$\int \frac{3x+7}{x^3-x^2-x+1}dx=\int \frac{3x+7}{(x+1)(x-1)^2}dx$$

En el denominador aparece $x=-1$ como raíz simple y $x=1$ como raíz doble.

$$\frac{3x+7}{(x+1)(x-1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

Aplicamos m.c.m. e igualamos numeradores.

$$3x+7=A(x-1)^2+B(x+1)(x-1)+C(x+1)$$

Si $x=1 \rightarrow 10=2C \rightarrow C=5$

Si $x=-1 \rightarrow 4=4A \rightarrow A=1$

Si $x=0 \rightarrow 7=1-B+5 \rightarrow B=-1$

Sustituyendo estos coeficientes en la integral:

$$\int \frac{3x+7}{x^3-x^2-x+1}dx=\int [\frac{1}{x+1}+\frac{-1}{x-1}+\frac{5}{(x-1)^2}]dx=\ln|x+1|-\ln|x-1|-\frac{5}{x-1}+C$$

¿Cómo razonar si, dentro de los diferentes tipos de raíces, aparece una raíz compleja?

$$Q(x)=(x-x_1)(x-x_2)^n(ax^2+bx+c)$$

Estaríamos ante una integral que une todos los casos anteriores: el denominador se puede expresar como producto de raíces reales simples, raíces reales múltiples y raíces complejas. Es un proceso largo y algo tedioso, por lo que no suele ser muy común como ejercicio tipo de Bachillerato.

Se aplica el método de coeficiente indeterminados, de tal forma que la fracción correspondiente a la raíz compleja se descompone con un denominador de primer grado. El cociente de polinomios de quedaría:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-x_1)(x-x_2)^n(a\,x^2+b\,x+c)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}+...+\frac{L}{(x-x_2)^n}+\frac{Mx+N}{a\,x^2+b\,x+c}$$

Donde los distintos coeficientes $A, B, ...L, M, N$ se obtienen dando valores a la variable x .

Ejemplo 2 resuelto

Resuelve $\int \frac{x+3}{x^3+x}dx$

$$\int \frac{x+3}{x^3+x}dx=\int \frac{x+3}{x(x^2+1)}dx$$

Tenemos $x=0$ y una raíz compleja $x^2+1=0$.

$$\frac{x+3}{x^3+x}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}$$

$$x+3=A(1+x^2)+(Bx+C)x$$

Si $x=0 \rightarrow 3=A$

Si $x=1 \rightarrow 4=6+B+C$

Si $x=2 \rightarrow 5=15+4B+2C$

Con las dos últimas ecuaciones planteamos un sistema 2x2 de soluciones:

$B=-3$, $C=1$

Y la integral queda expresada como:

$$\int \frac{x+3}{x(x^2+1)}dx=\int \frac{3}{x}dx+\int \frac{-3\,x+1}{1+x^2}dx=3\cdot\ln|x|-3\int \frac{x}{1+x^2}dx+1\int \frac{1}{1+x^2}dx+C$$

$$3\cdot\ln|x|-\frac{3}{2}\int \frac{2\,x}{1+x^2}dx+arcotg\,x+C=3\cdot\ln|x|-\frac{3}{2}\ln|1+x^2|+arcotg\,x+C$$