Verloop goniometrische en cyclometrische functies

www.karelappeltans.be

July 2, 2024

Contents

1 herhaling

1.1 overzicht

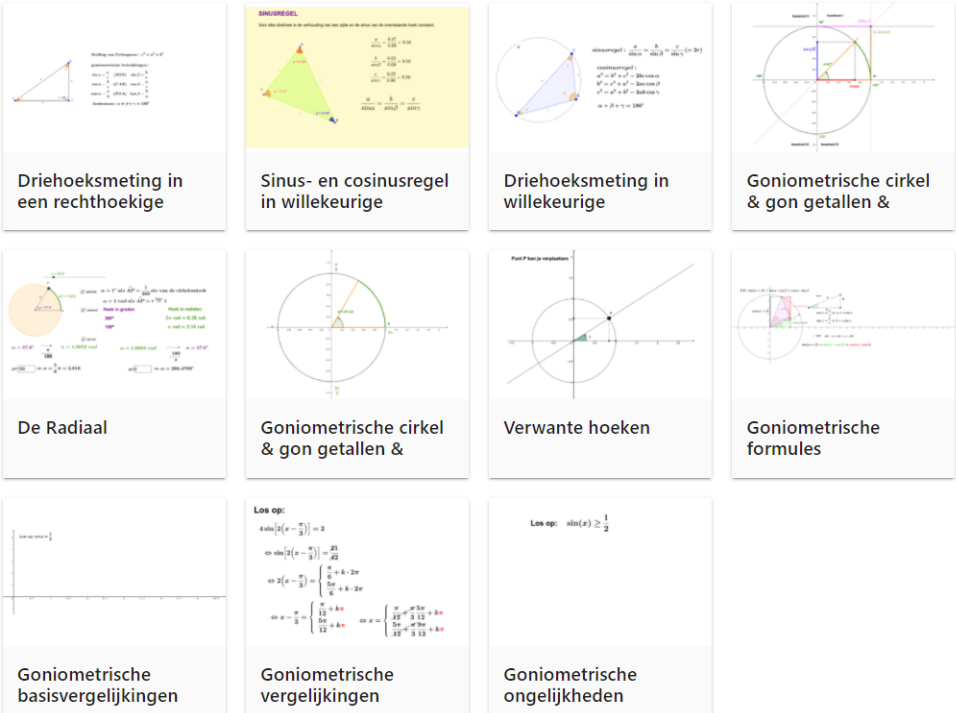


Figure 1: https://www.geogebra.org/m/QtdpYKT3#chapter/222484

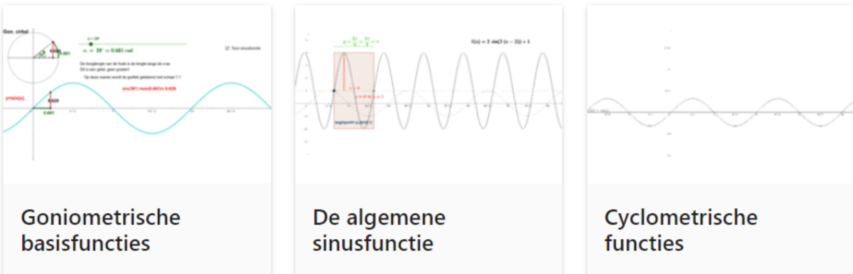


Figure 2: https://www.geogebra.org/m/QtdpYKT3#chapter/222480

1.2 goniometrische formules

Basisformules

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad \csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad 1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Verdubbelings- en halveringsformules

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 \qquad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

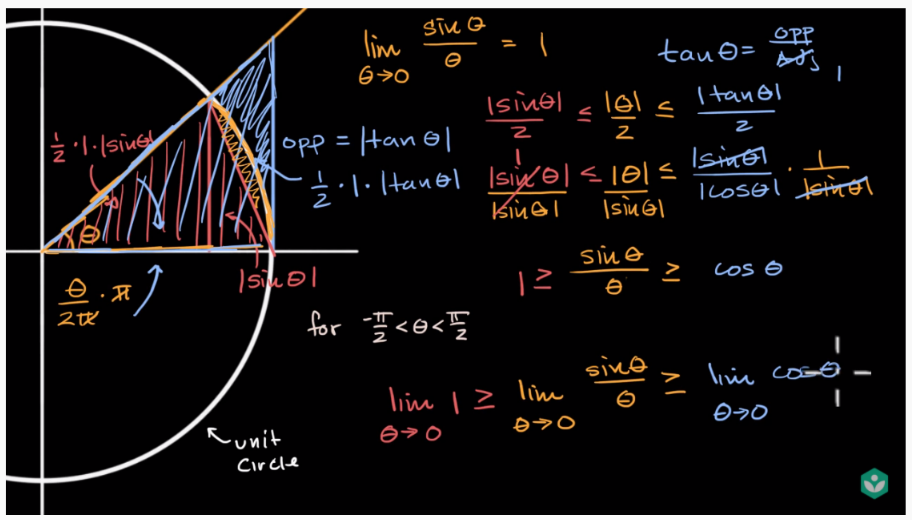
$$\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha \qquad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

Figure 3: https://www.geogebra.org/m/QfWuM7tH

2 Afgeleide goniometrische functies

2.1 Een belangrijke limiet



https://youtu.be/5xitzTutKqM

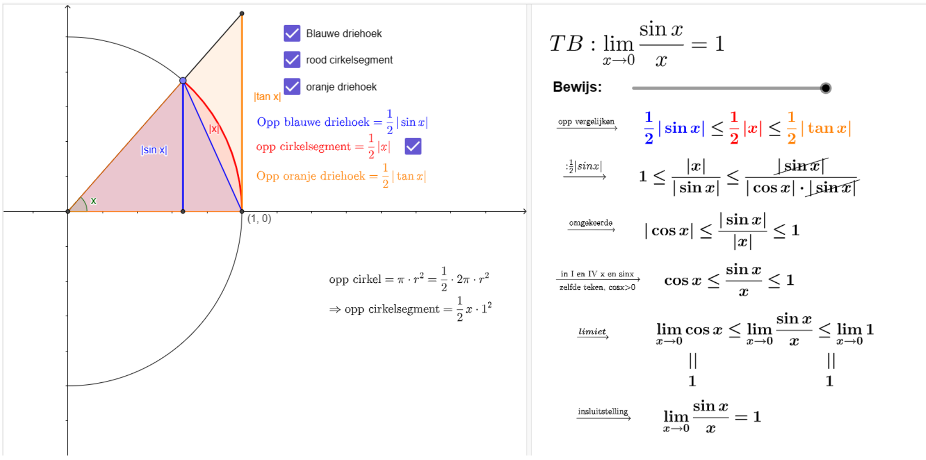


Figure 4: https://www.geogebra.org/m/fvnw27cj

2.2 Rekenregels

$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$(\sin\Box)' = \cos\Box \cdot \Box'$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$(\cos\Box)' = -\sin\Box \cdot \Box'$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan\Box)' = \dfrac{1}{\cos^2\Box} \cdot \Box'$
$f(x) = \cot x$	$f'(x) = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$	$(\cot\Box)' = \dfrac{-1}{\sin^2\Box} \cdot \Box'$
$f(x) = \arcsin x$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin\Box)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\Box^2}} \cdot \Box'$
$f(x) = \arccos x$	$f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos\Box)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-\Box^2}} \cdot \Box'$
$f(x) = \arctan x$	$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$	$(\arctan\Box)' = \dfrac{1}{1+\Box^2} \cdot \Box'$
$f(x) = \text{arccot}\, x$	$f'(x) = \dfrac{-1}{1+x^2}$	$(\text{arccot}\,\Box)' = \dfrac{-1}{1+\Box^2} \cdot \Box'$

Figure 5: https://www.geogebra.org/m/rkbXbnRv

3 extremumproblemen

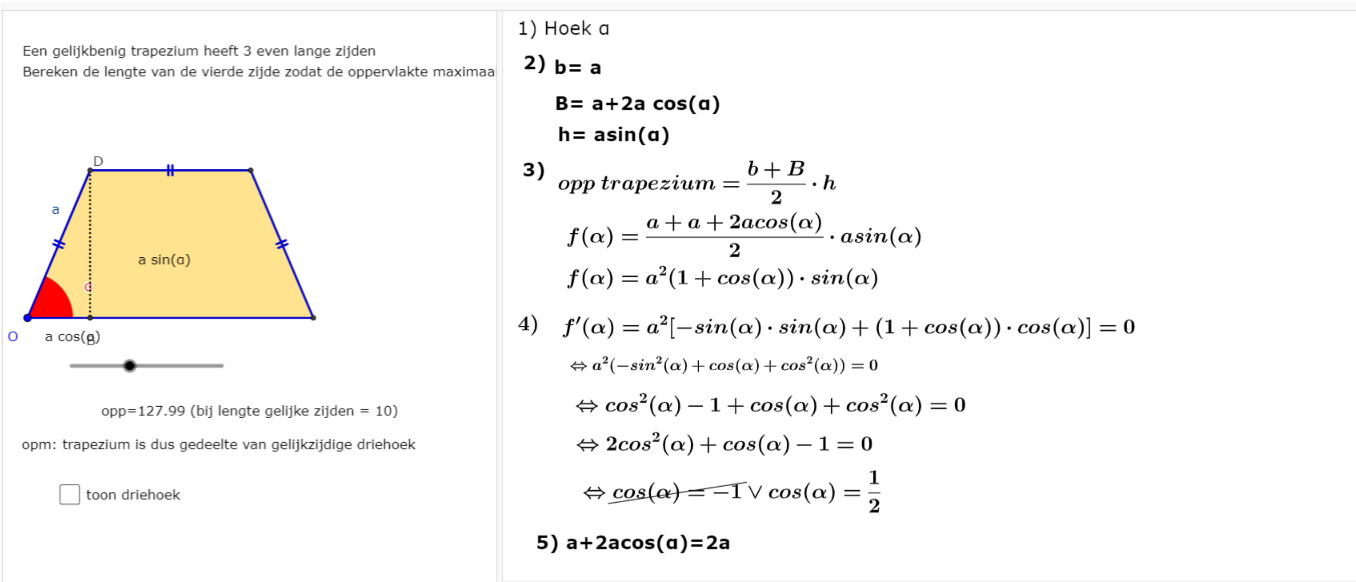


Figure 6: https://www.geogebra.org/m/gceq8KGM

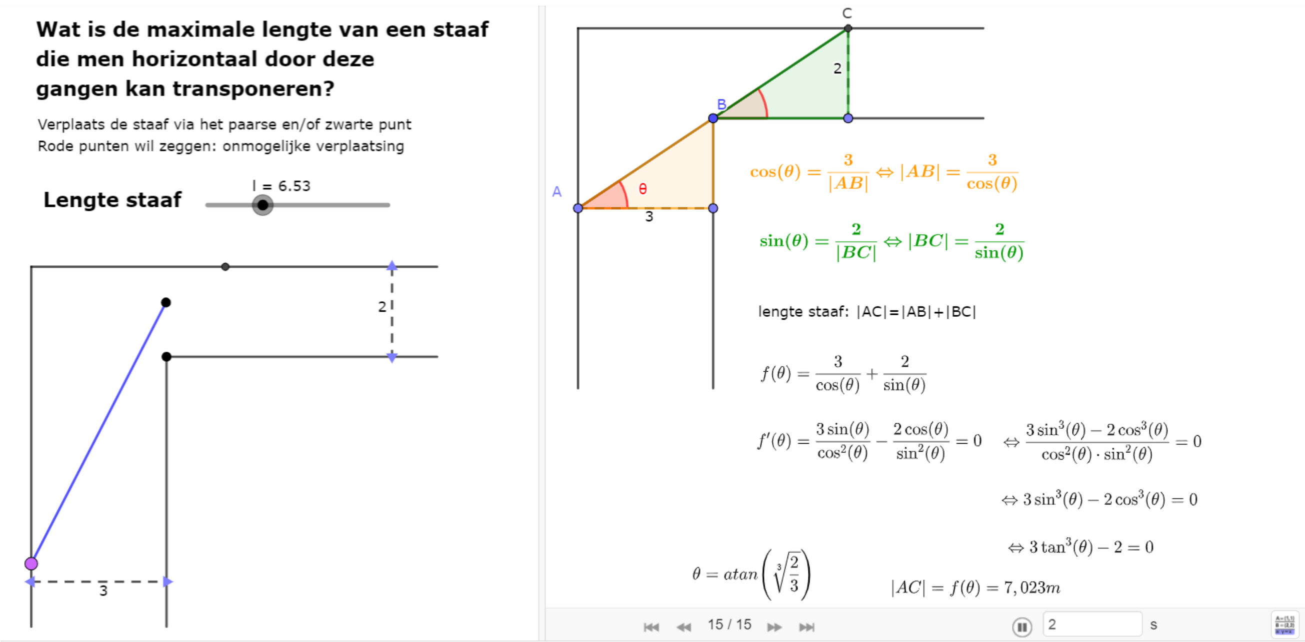


Figure 7: https://www.geogebra.org/m/gceq8KGM

4 cyclometrische functies

4.1 herhaling

4.1.1 f(x)=asin(x)

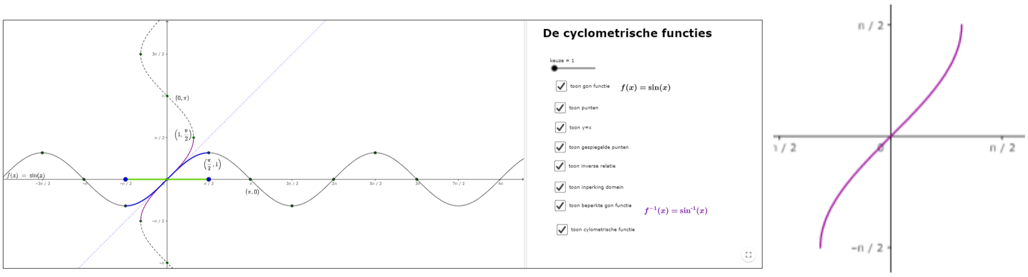


Figure 8: `https://www.geogebra.org/m/Vx7MuEsU`]https://www.geogebra.org/m/Vx7MuEsU

4.1.2 f(x)=acos(x)

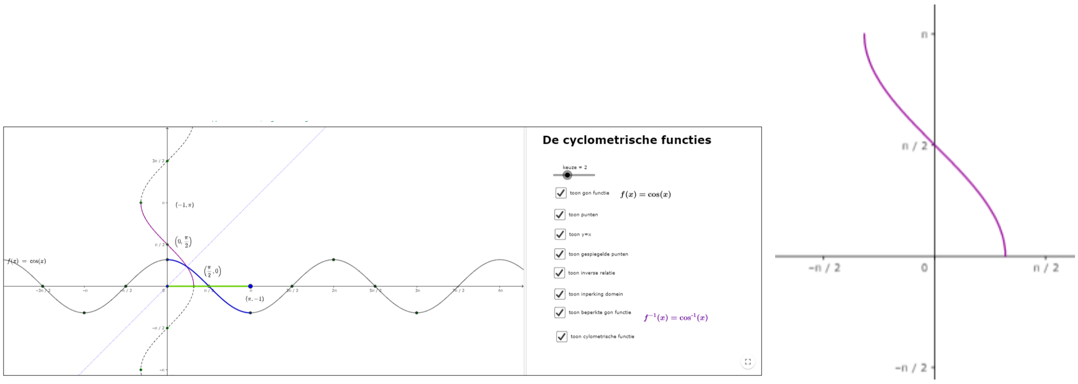


Figure 9: `https://www.geogebra.org/m/Vx7MuEsU`]https://www.geogebra.org/m/Vx7MuEsU

4.1.3 f(x)=atan(x)

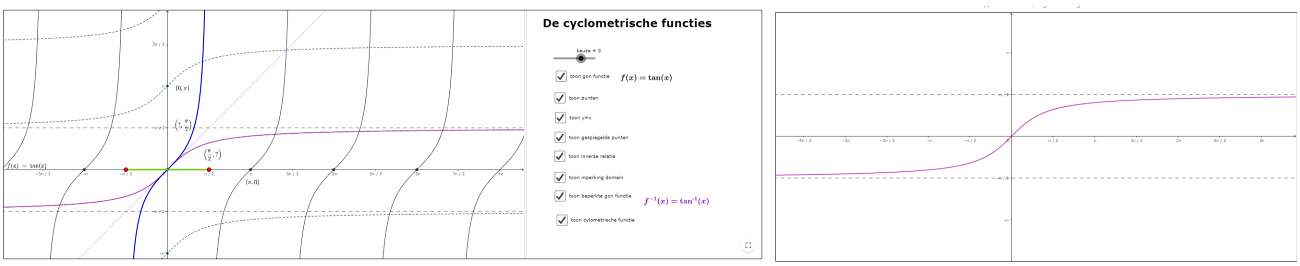


Figure 10: `https://www.geogebra.org/m/Vx7MuEsU`]https://www.geogebra.org/m/Vx7MuEsU

4.2 rekenregels

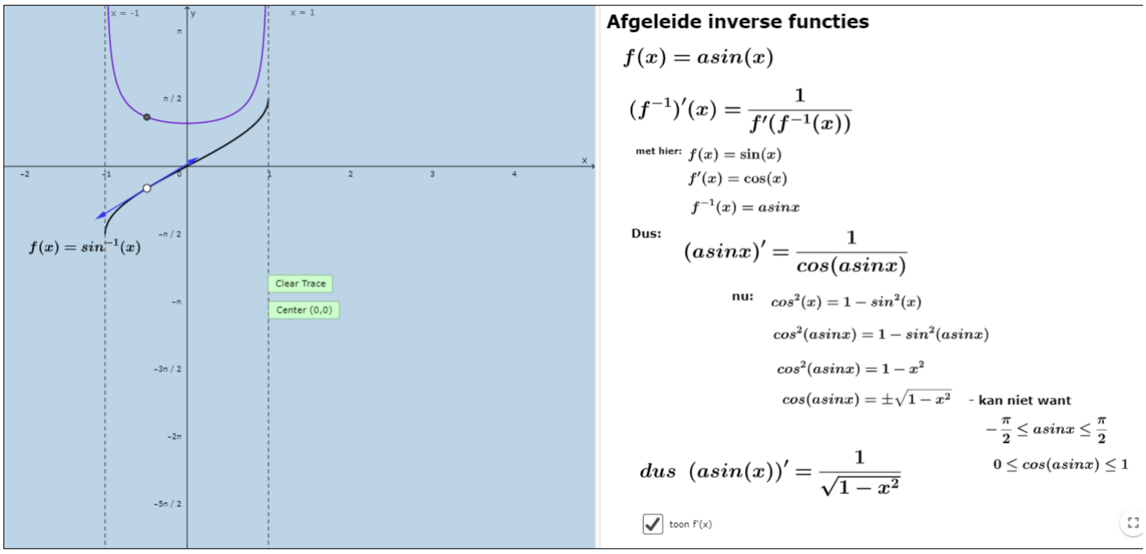


Figure 11: https://www.geogebra.org/m/ttm5vtjnhttps://www.geogebra.org/m/ttm5vtjn

$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$(sin\Box)' = \cos\Box \cdot \Box'$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$(\cos\Box)' = -\sin\Box \cdot \Box'$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan\Box)' = \frac{1}{cos^2\Box} \cdot \Box'$
$f(x) = \cot x$	$f'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$	$(\cot\Box)' = \frac{-1}{sin^2\Box} \cdot \Box'$
$f(x) = \arcsin x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin\Box)' = \frac{1}{\sqrt{1-\Box^2}} \cdot \Box'$
$f(x) = \arccos x$	$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos\Box)' = \frac{-1}{\sqrt{1-\Box^2}} \cdot \Box'$
$f(x) = \arctan x$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$(\arctan\Box)' = \frac{1}{1+\Box^2} \cdot \Box'$
$f(x) = \operatorname{arccot} x$	$f'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arccot}\Box)' = \frac{-1}{1+\Box^2} \cdot \Box'$

Figure 12: https://www.geogebra.org/m/rkbXbnRv

4.3 verloop

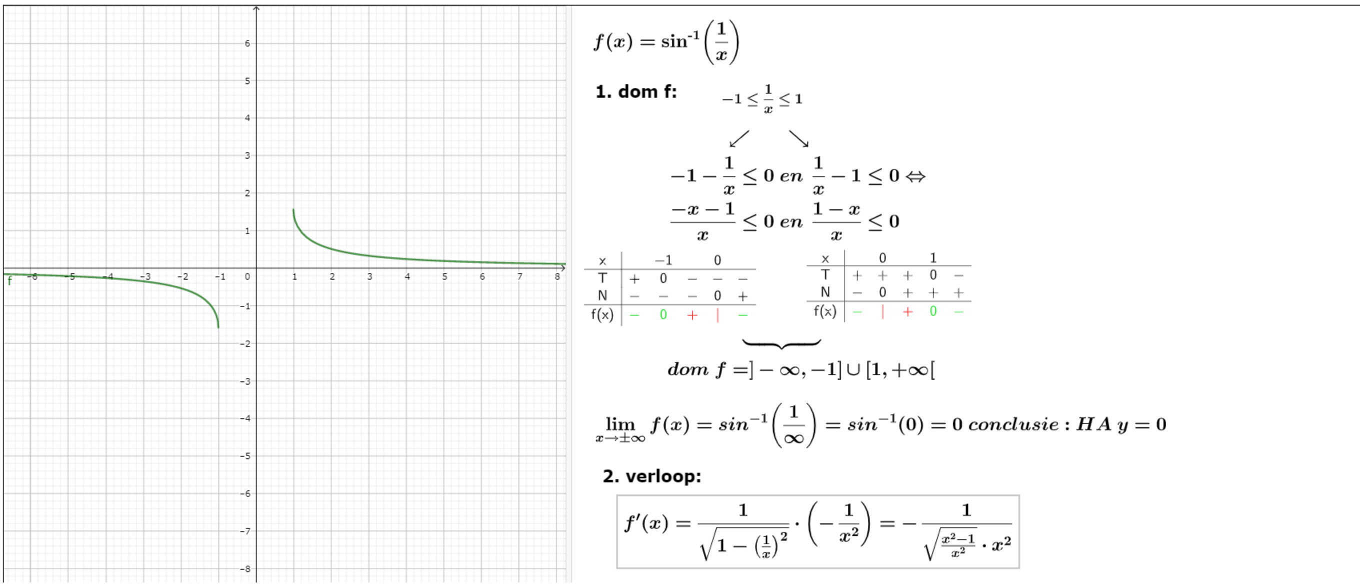


Figure 13: https://www.geogebra.org/m/ttm5vtjn

5 verwante snelheden

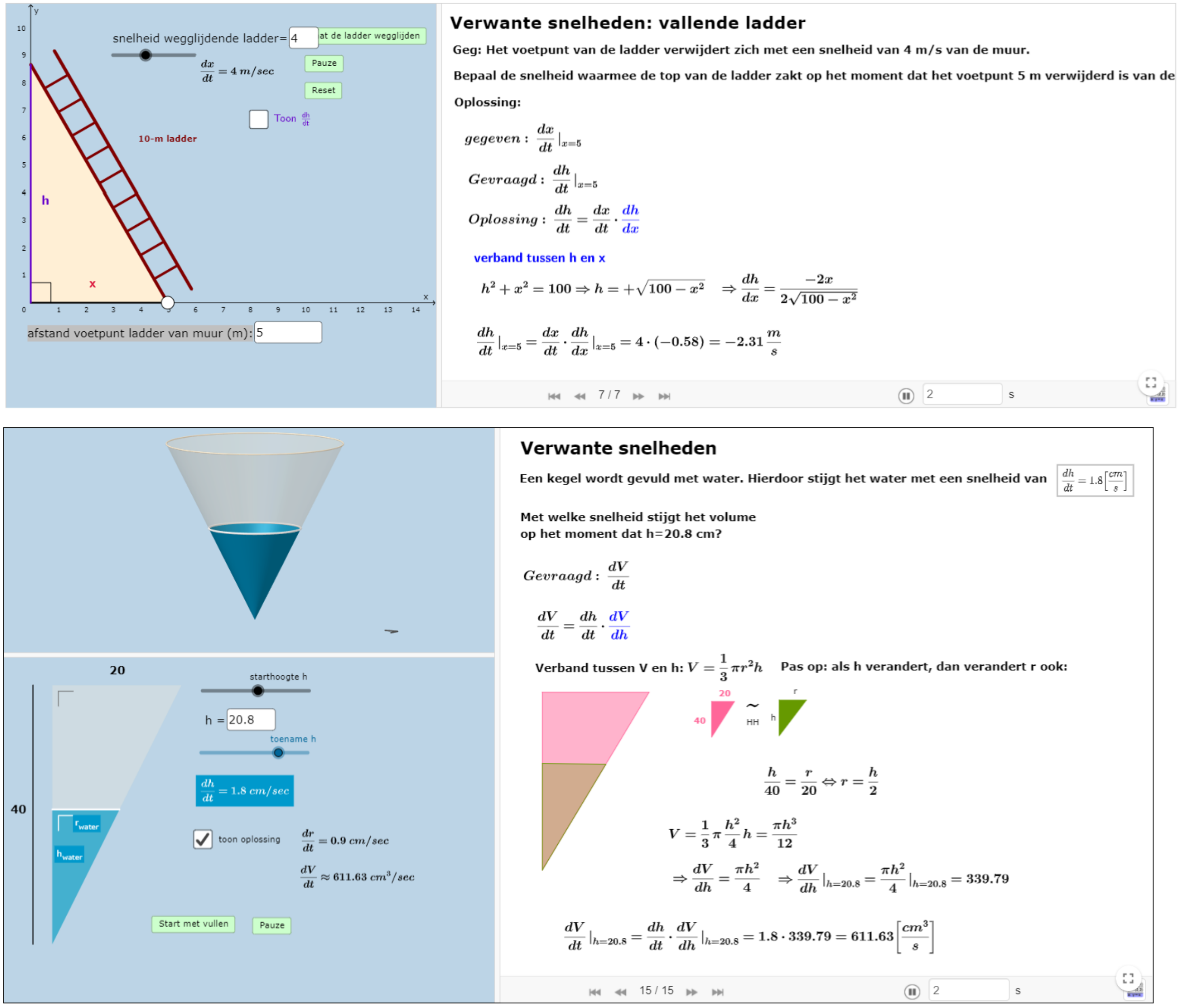


Figure 14: https://www.geogebra.org/m/apvhd9vj

6 oefeningen

6.1 een belangrijke limiet

6.2 rekenregels

1. Bepaal de afgeleide van $f(\theta) = -\frac{1}{5}\cos(\theta)(\sin^2(\theta)+2)$ (A. $f'(\theta) = \frac{3}{5}\sin^3(\theta)$)

2. Gegeven: $f(x) = sin^2(x^2)$. Bepaal $f'\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$.

3. Bepaal a en b zodat $y'' + 4y = sinx \cdot cosx$ met $y(x) = x(acos2x + bsin2x)$

4. Gegeven: $f(x) = tan^2(x)$ en $P\left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ Bepaal de opp van ΔQPT met Q het snijpunt van de raaklijn met de x-as en $T(\frac{\pi}{4}, 0)$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2sinx - sin2x}{x - sinx}$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tanx - x}{x^3}$

7. Bepaal de afgeleide van $f(x) = arcsin(sin(x))$

8. Bepaal de rico van de raaklijn in het punt $P\left(-\frac{\pi}{2}, f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$ van de grafiek van $f(x) = \frac{1}{2}\tan(2x+\pi)$

9. Gegeven $g(x) = 2x - \cos(x)$

   (a) Toon aan dat g inverteerbaar is

   (b) Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van $y = g^{-1}(x)$ in het punt $P(4\pi - 1, 2\pi$ (A. $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$)

10. Gegeven $f : [-1,1] \to \mathbf{R} : x \mapsto f(x) = (6x^2 - 3)\arcsin x + 3x\sqrt{1-x^2} - \pi x^2$. Bepaal $f'\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ (A. $3\sqrt{3}\pi$)

11. Gegeven de functies f en g met $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \sin^2 x$ en $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto g(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\tan x$. Bepaal de waarde van x waarvoor de raaklijn aan de grafiek van f in het punt (x,f(x)) loodrecht staat op de raaklijn aan de grafiek van g in het punt (x,f(x)). (A. $x = \frac{5\pi}{6}$)

12. Veronderstel dat jouw positie gegeven wordt door:

$$x(t) = \cos(\pi t),\ 0 \le t \le 2$$

   (a) Wat is jouw positie aan het begin en aan het einde van de trip?

   (b) Beschrijf jouw trip in woorden

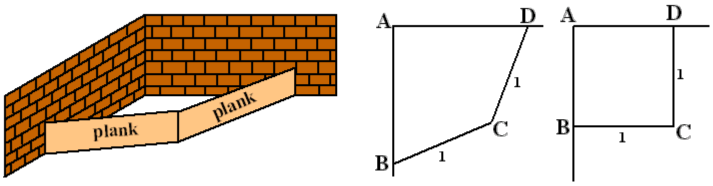
   (c) Wat is de totale afstand die je hebt afgelegd?

   (d) Bereken jouw snelheid. Wanneer is deze gelijk aan nul? Wat is het verband met jouw positie op die momenten?

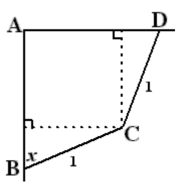
13. Voor welke waarde(n) van a zal $f(x) = \sqrt{\ln(a \cdot \sin(x) + 3)}$ overal gedefinieerd zijn? (A. $a \in [-2, 2]$)

6.3 extremumproblemen

1. In de hoek van mijn terras wil ik een zandbak maken voor Liene en Janne. Hiervoor worden twee planken van elk 1 meter lengte gebruikt. Zie de figuur hieronder. De planken worden zo geplaatst dat het bovenaanzicht van de zandbak een symmetrische vierhoek is. In de figuren hieronder is van twee mogelijke situaties het bovenaanzicht op schaal getekend



In het bovenaanzicht geldt steeds: AB = AD en BC = CD = 1 meter. Vierhoek ABCD is symmetrisch ten opzicht van de diagonaal AC. De grootte van hoek B noemen we x



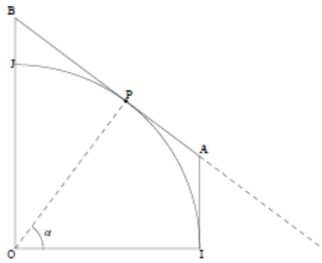
Voor de oppervlakte O van vierhoek ABCD geldt dan:

$$O = (sin(x))^2 + sin(x)cos(x)$$

   (a) Toon de juistheid van deze formule aan.

(b) Voor welke hoek is deze oppervlakte maximaal?

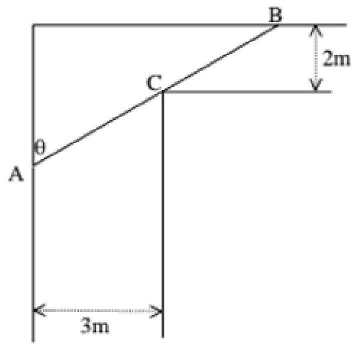
2. IJ is een kwart van de goniometrische cirkel met O als middelpunt. Door een willekeurig punt P op de cirkelboog, tekent men de raaklijn. Deze snijdt het verlengde van OJ in B en snijdt de evenwijdige in I met OJ in A. Men noteert α de hoek tussen OI en OP



(a) Toon aan dat de oppervlakte van de trapezium OIAB in functie van α wordt gegeven door: $f(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$

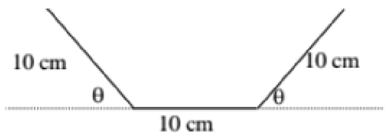
(b) Bepaal de hoek α (in radialen waarvoor de oppervlakte maximaal is.

3. Bepaal de lengte van de langste staaf AB die nog door deze gang kan gedragen worden.



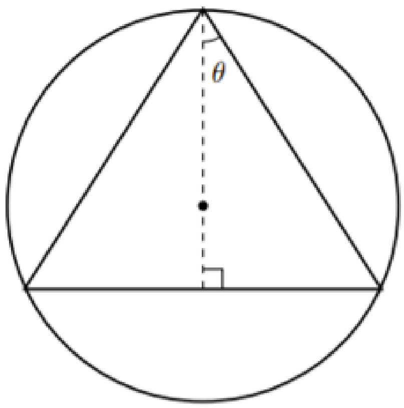
$(\theta = arctan \sqrt[3]{\frac{3}{2}}, |AB| = 7,023m)$

4. Bepaal de hoek θ om de grootst mogelijke oppervlakte voor de dakgoot te krijgen waar hier de dwarsdoorsnede te zien is:



$(\theta = \frac{\pi}{3})$

5. Een gelijkbenige driehoek is ingeschreven in een cirkel met straal 1. De tophoek wordt 2θ genoemd.



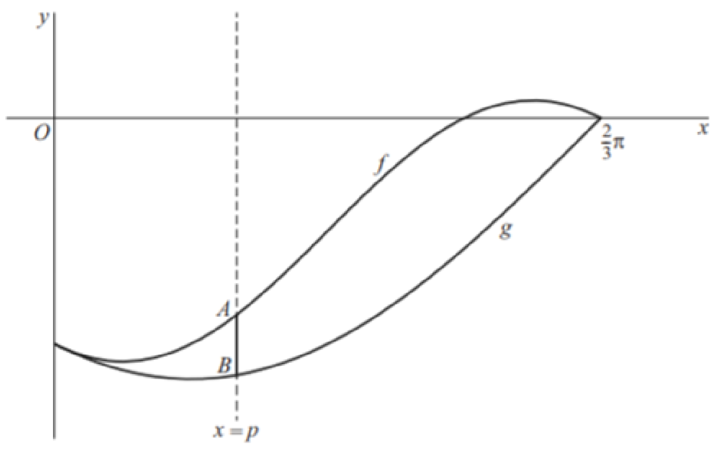
(a) Toon aan dat $O = 4\sin\theta\cos^3\theta$

(b) Toon aan dat de ingeschreven gelijkbenige driehoek met de grootste opp gelijkzijdig is

6. de functies f en g zijn gegeven door:

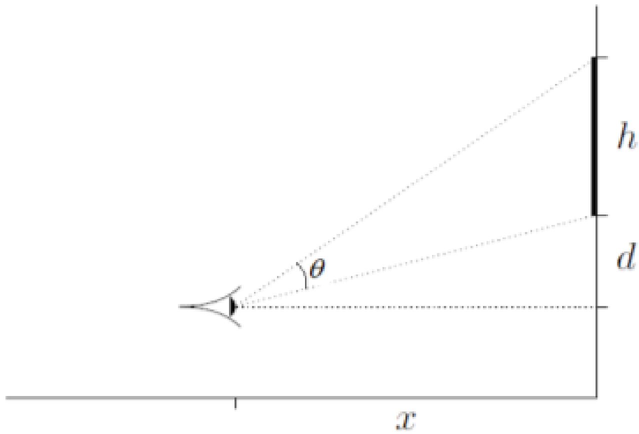
$$f(x) = \frac{1}{2}\sin\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$g(x) = \sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$$



Bereken exact voor welke waarde van p het lijnstuk [AB] maximaal is.

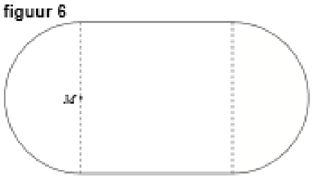
7. Een schilderij met een hoogte van h meter hangt aan een muur. De onderkant van het schilderij hangt op d meter boven het oog van de waarnemer. Op welke afstand van het schilderij moet een waarnemer staan om het schilderij onder een zo groot mogelijke kijkhoek waar te nemen? (A.$x = \sqrt{d(h+d)}$)



8. een vraag uit een Nederlands eindexamen:

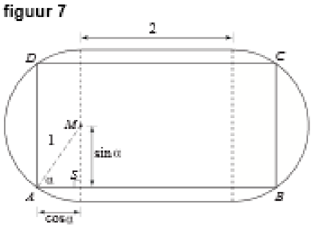
Het ovaal in figuur 6 bestaat uit een vierkant van 2 bij 2 met aan weerszijden een halve cirkel met straal 1. M is het middelpunt van een van de halve cirkels.

figuur 6



In het ovaal wordt een rechthoek $ABCD$ getekend met de hoekpunten op de halve cirkels en met de zijden evenwijdig aan de zijden van het vierkant. $\angle MAB = \alpha$ rad ($0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$). Zie figuur 7. Hierin is de rechthoekige driehoek AMS te zien met rechthoekszijden $\sin\alpha$ en $\cos\alpha$.

figuur 7



De oppervlakte O van rechthoek $ABCD$ kan uitgedrukt worden in α. Er geldt: $O = 2\sin 2\alpha + 4\sin\alpha$.

4p 7 Toon aan dat deze formule juist is.

Er geldt: $\frac{dO}{d\alpha} = 8 \cdot \cos 1\frac{1}{2}\alpha \cdot \cos\frac{1}{2}\alpha$.

4p 8 Toon aan dat de formule voor $\frac{dO}{d\alpha}$ juist is.

Er is een waarde van α, met $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$, waarvoor de oppervlakte van rechthoek $ABCD$ maximaal is.

4p 9 Bereken langs algebraïsche weg de maximale oppervlakte van rechthoek $ABCD$.

9. oefeningen in handboek

6.4 cyclometrische functies

1. Bepaal het verloop van $f(x) = Bgcos\left(\frac{2}{x}\right)$

6.5 verwante snelheden

1. Een steen wordt naar beneden geworpen langs één kant van een 100 meter brede ravijn. Langs de andere kant observeert men de vallende steen. Hoe snel verandert de kijkhoek op t=3s? Volgende formule kan nuttig zijn: $s = \frac{1}{2}gt^2$ (A: 0,25 rad/s)

2. Alle oef behalve de eerste (A./; 1.0078 m/s; -0.000159 in/sec; 2.917 ft/sec; 4.5 ft/sec; -0.5 rad/sec)

Now you try some:

1. If $a^2 = b^2 + 4b + c^2$, $\frac{db}{dt} = 2$, $\frac{dc}{dt} = 3$, find $\frac{da}{dt}$ when b = 1 and c = 2.
   (Assume a > 0)

2. A boat is pulled by a rope, attached to the bow of the boat, and passing through a pulley on a dock that is 1 meter higher than the bow of the boat. If the rope is pulled in at a rate of 1 m/sec, how fast is the boat approaching the dock when it is 8 meters from the dock?

3. A cylinder with a height of 5 ft and a base radius of 10 in is filled with water. The water is being drained out at a rate of 3 cubic inches per minute. How fast is the water level decreasing?

4. A 13-foot ladder propped up against a wall is sliding downward such that the rate at which the top of the ladder is falling to the floor is 7 ft/sec. Find the rate at which the distance between the bottom of the ladder and the base of the wall is increasing when the top of the ladder is 5 ft from the base of the wall.

5. A street light is mounted at the top of a 12 ft pole. A 4 ft child walks away from the pole at a speed of 3 ft/sec. How fast is the tip of her shadow moving?

6. A 12-foot ladder is propped up against a wall. If the bottom of the ladder slides away from the wall at a rate of 3 ft/sec, how fast is the measure of the angle between the bottom of the ladder and the floor changing when the angle between the top of the ladder and the wall measures $\pi/3$ radians?

7 taken

1. goniometrie

2. verwante snelheden