Teoría – Tema 5

Teoría - 22 - regla de Barrow

Regla de Barrow para el cálculo de integrales definidas.

Con la definición formal de integral ocurre lo mismo que con la definición formal de derivada o la definición formal de límite. **Cuando las funciones se complican, las definiciones formales son difíciles de operar.**

Por eso buscamos **métodos más prácticos**. Para ello vamos a estudiar **la regla de Barrow**, que es una consecuencia (corolario) del Teorema Fundamental del cálculo integral (y que demostraremos más adelante en el tema).

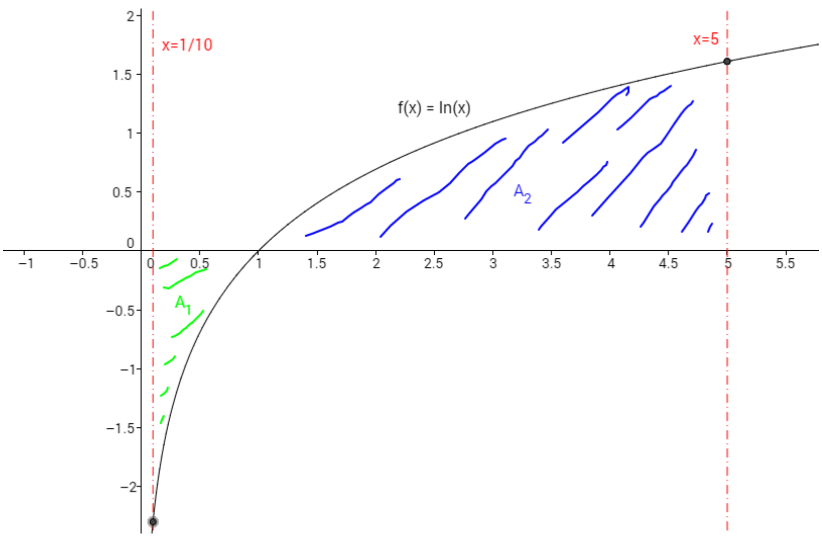
Regla o Corolario de Barrow

Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$ y sea $F(x)$ una primitiva de $f(x)$ en $[a,b]$.

Entonces se cumple: $\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$

Ejemplo 1 resuelto

Obtener el área encerrada por $f(x)=\ln(x)$ **con el eje de abscisas en el intervalo** $[\frac{1}{10},5]$ **.**



Al representar gráficamente la curva, vemos que parte de la curva está por debajo del eje de abscisas y parte por encima. Y el corte con el eje OX se produce en $x=1$.

El área total A buscada será (según notación de la gráfica superior):

$$A=A_1+A_2$$

$$A_1\equiv \text{ Área desde } x=\frac{1}{10} \text{ hasta } x=1 \rightarrow A_1=-\int_{\frac{1}{10}}^{1} \ln(x)\,dx$$

$$A_2\equiv \text{ Área desde } x=1 \text{ hasta } x=5 \rightarrow A_2=\int_{1}^{5} \ln(x)\,dx$$

Por lo tanto, debemos obtener una primitiva de $f(x)=\ln(x)$ y aplicar la regla de Barrow en cada tramo de área definida.

$$\int \ln(x)\,dx=x\cdot\ln(x)-x+C$$

Donde hemos aplicado el método de integración por partes.

Al sustituir en la integral definida no es necesario que usemos la constante C, ya que ésta cancela al aplicar la regla de Barrow:

Si $F(x)=\int f(x)\,dx \rightarrow \int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$

$$A_1=-\int_{\frac{1}{10}}^{1} \ln(x)\,dx=-[x\cdot\ln(x)-x]_{\frac{1}{10}}^{1}=-[(1\cdot\ln(1)-1)-(\frac{1}{10}\cdot\ln(\frac{1}{10})-\frac{1}{10})]$$

$$A_2=\int_{1}^{5} \ln(x)\,dx=[x\cdot\ln(x)-x]_1^5=[(5\cdot\ln(5)-5)-(1\cdot\ln(1)-1)]$$

Operamos (recuerda que el logaritmo de un cociente es la diferencia del logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador).

$$A_1=-[(0-1)-(\frac{-1}{10}\cdot\ln(10)-\frac{1}{10})]=1-\frac{1}{10}\cdot\ln(10)-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}-\frac{1}{10}\cdot\ln(10)$$

$$A_2=[(5\cdot\ln(5)-5)+1]=5\cdot\ln(5)-4$$

Por lo tanto: $A=A_1+A_2$

$$A=\frac{9}{10}-\frac{1}{10}\cdot\ln(10)+5\cdot\ln(5)-4=\frac{-31}{10}-\frac{1}{10}\cdot\ln(10)+5\cdot\ln(5) \rightarrow A\simeq 4{,}72 \;\; u^2$$