Parte 4: Mapeos en una dimensión

Material. Libro de Strogatz. Capítulo 10.

Vamos a estudiar los sistemas dinámicos discretos más sencillos que presentan un comportamiento caótico, que permiten llegar a un análisis detallado que revela características fundamentales de la teoría del caos.
Estos sistemas son conocidos como *mapeos iterativos, relaciones recursivas* de ecuaciones en diferencias finitas, relaciones de recurrencia o aplicaciones iteradas o simplemente *mapas*.

Los sistemas dinámicos discretos evolucionan en el tiempo por el proceso de iteración, en el que el siguiente estado del sistema es determinado por su estado actual.

Los mapas unidimensionales son de la forma:

$$x_{n+1}=f(x_n)$$
$$x_0 \quad \text{valor inicial}$$

El procedimiento típico de un sistema iterado es muy sencillo aunque su dinámica puede ser muy complicada. Se escoge primero un valor inicial x_0 de la variable a iterar. Después se calcula el valor de la función en ese punto $f(x_0)$, que determina un nuevo punto $x_1=f(x_0)$. Finalmente se usa el valor obtenido como entrada para empezar de nuevo el algoritmo. Repitiendo el algoritmo *n veces* se genera una trayectoria de valores reales: $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de la que interesa conocer su comportamiento. Esta secuencia o sucesión es conocida como *órbita* que se inicia en x_0 y donde se cumple que

$$x_n=f(x_{n-1})=f(f(x_{n-2}))=\ldots.. =f^n(x_0)$$

Las aplicaciones iteradas surgen de varios modos:

1. Herramientas para analizar ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, los mapas de Poincaré permiten probar la existencia de una solución periódica para el péndulo forzado y analizar la estabilidad de soluciones periódicas en general. El mapa de Lorenz proporciona fuerte evidencia de que el atractor de Lorenz es realmente extraño (en sentido matemático) y no es simplemente un ciclo límite de periodo largo.

2. Modelos de fenómenos naturales. En algunos contextos científicos es natural considerar el tiempo como discreto. Es el caso de la electrónica digital, en partes de la teoría económica y financiera, en sistemas mecánicos forzados a impulsos y en el estudio de ciertas poblaciones de insectos en las que generaciones sucesivas no se superponen.

3. Ejemplos simples de caos. Las aplicaciones iteradas merecen un estudio por derecho propio, como laboratorios matemáticos del caos. De hecho son capaces de

comportamientos mucho más complicados que las ecuaciones diferenciales porque los puntos x_n saltan en sus trayectorias en vez de fluir continuamente.

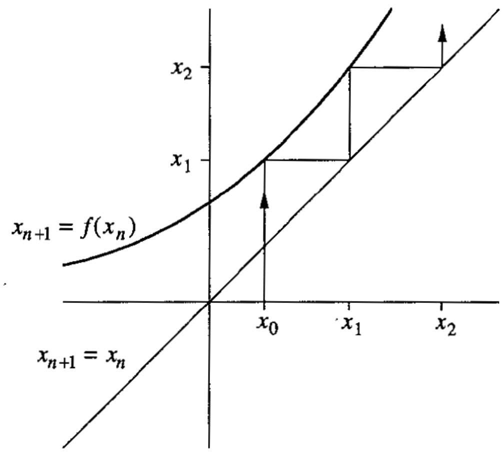
Las aplicaciones iteradas son fácil y rápidamente simuladas en computadoras, en las que el tiempo es inherentemente discreto. Tales experimentos revelan un número de patrones inesperados, que a su vez han estimulado nuevos desarrollos teóricos. Sorprendentemente, las aplicaciones iteradas han generado una cantidad de predicciones con éxito sobre las rutas al caos en semiconductores, fluidos convectivos, células cardíacas, láseres y oscilaciones químicas.

En los mapas, definimos *punto fijo* a un punto que verifique

$$f(x^*) = x^*$$

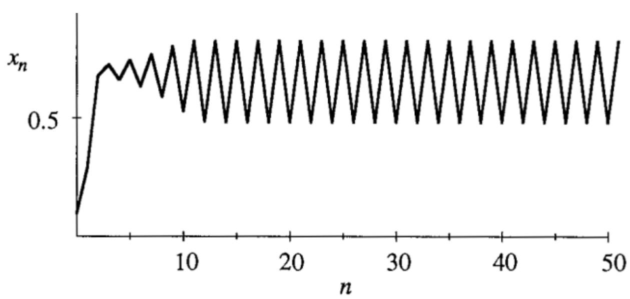
Entonces si para algún $x_n = x^*$, $f(x_n) = x^*$.

Los mapas, los graficaremos del siguiente modo:



Se grafica una telaraña que une los puntos $(x_0;0)$, $(x_0;x_1)$, $(x_1;x_1)$, $(x_1;x_2)$, … y así sucesivamente. En el eje de las abscisas graficamos x_n y en el de ordenadas x_{n+1}.

También es usual graficar en el plano en un sistema de coordenadas *n versus* x_n. Por ejemplo:



O simplemente en la recta real graficar los puntos x_i , con i=0..n.

Punto fijo y estabilidad

Para determinar la estabilidad de un punto fijo x^*, consideremos una órbita cercana a ella.

Sea $x_n = x^* + e_n$ y nos preguntamos si es atractiva o repulsiva al punto fijo para n creciendo.

Entonces $x_{n+1} = x^* + e_{n+1} = f(x^* + e_n) = f(x^*) + f'(x^*).\ e_n + O(e_n^2)$

Pero, por ser x^* punto fijo, $f(x^*) = x^*$, lo anterior se reduce a

$$e_{n+1} = f'(x^*).\ e_n + O(e_n^2)$$

Despreciando el error, obtenemos

$$e_{n+1} = f'(x^*).\ e_n$$

Esta fórmula recursiva es del tipo geométrica y converge si $|f'(x^*)| < 1$. Es decir que en este caso, x^* es un *punto fijo estable*.

Si $|f'(x^*)| > 1$, x^* es un *punto fijo inestable.*

Para valores de $f'(x^*) = 1$ hay que considerar para el análisis el termino del error.

Actividad

En todos los casos hallar los puntos de equilibrio, clasificarlos y realizar simulaciones y gráficas en las que se observe el comportamiento del mapa dado (en los dos primeros incisos según sean las constantes).

1. $f(x)=ax+b$ un *mapa lineal*, donde a y b son constantes.

2. $f(x)=x^2+c$ *mapa cuadrático* con c constante.

3. T*end map* en el interval [0,1] por

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 1/2 \\ 2(1-x) & 1/2 \le x \le 1 \end{cases}$$

Actividad para entregar

Mapa logístico

Consideremos el mapa logístico (en tiempo discreto)

$$x_{n+1} = f(x_n)$$
$$f(x_n) = r.\, x_n\, .(1 - x_n)$$
$$x_0\text{: condición inicial}$$
$$r\text{: parámetro positivo}$$

Esta aplicación fue introducida por primera vez por Pierre F. Verhulst en 1845. Fue popularizada en un artículo de 1976 del físico Robert May, como análoga en tiempo discreto a la ecuación diferencial logística para el crecimiento de una población. En su artículo, May enfatizó que incluso aplicaciones no lineales simples pueden presentar dinámicas muy complejas. Una de sus aplicaciones, como ya se ha mencionado, es la de modelizar el crecimiento de una población en un área cerrada. El parámetro *r* representa la fertilidad y demás influencias externas.

¿Por qué es interesante?

El *mapa logístico* es interesante porque reúne, en un solo sistema unidimensional y dependiente sólo de un parámetro, un abanico de comportamientos diversos para las trayectorias x_n cuando se varía el valor de *r* y/o de x_0. Además estos comportamientos se encuentran en muchos otros sistemas discretos y continuos. Se dice que sus características dinámicas son universales en ese sentido. Ejemplos de estos rasgos son la sensibilidad a las condiciones iniciales, la ruta al caos por duplicación de periodo o el fenómeno de la intermitencia.

Vamos a restringir el estudio del mapa logístico para valores de r, $0 \leq r \leq 4$.

1. Hallar los puntos fijos del mapa logístico. Hacerlo analíticamente y gráficamente. Ayuda: Algebraicamente se resuelve la ecuación f(x)=x. Gráficamente (utilizar para ello un software Geogebra, Octave, Scilab, Matlab u otros) dibujar conjuntamente y=f(x) y la recta y=x. En este caso f(x) = r.x.(1-x). Los puntos de intersección de ambas curvas, son los puntos fijos.

2. Clasificar los puntos fijos en estables o inestables, según sea r.

3. Realizar simulaciones para distintos valores de r y de x_0 (sugeridos) y analizar el comportamiento del mapa en cada caso, graficando (x_n, x_{n+1}) y (n, x_n).

r	x_0	Punto de equilibrio	Comportamiento
1.5	0.25		
2			
2.8			
3.3			

3.5			
3.75	0.100		
3.75	0.101		

4. Sean dos trayectorias que comienzan con condiciones iniciales xa(0) y xb(0)=xa(0)+δx(0). Para un tiempo "grande" cuál será la diferencia entre xa(t) y xb(t)? Estimar el parámetro λ (Exponente de Lyapunv[1]) tal que

$$|xa(0)-xb(0)| = |\delta x(0)|\, e^{\lambda t}$$

Graficar (r, λ) para distintos r. Analizar.

5. Diagrama de bifurcación: Realizar un diagrama en el eje de abscisas r, y en el eje de ordenadas x^*, para dar cuenta del mapa de bifurcaciones.

[1]**Sensibilidad a las condiciones iniciales**.
Esta propiedad de carácter local se trata de la separación exponencial de las órbitas, responsable de la sensibilidad a las condiciones iniciales. Si se consideran dos condiciones iniciales, xa(0) y xb(0)= xa(0)+δx(0), que difieren en una cantidad pequeña δx(0). Al pasar el tiempo, cada una da lugar a órbitas xa(t) y xb(t)=xa(t)+δx(t). Si el sistema es caótico, entonces la separación entre las dos órbitas crece exponencialmente: $|\delta x(t)| = |\delta x(0)|\, e^{\lambda t}$, donde λ es una constante conocida con el nombre de Exponente de Lyapunov. Cuando el exponente de Lyapunov es positivo el sistema es caótico para el valor del parámetro dado, mientras que si es negativo el sistema es regular.