Teoría – Tema 5

CCSS - Teoría - 3d - Introducción a los límites en el infinito

Límites en el infinito

Hasta ahora, al calcular límites, estamos estudiando el comportamiento de la función en los alrededores de un valor x_0 finito. Por ejemplo:

$$\lim_{x \to 3} (x^2+2x-2)=13$$

¿Qué ocurre si deseamos estudiar el comportamiento de la función en puntos tremendamente positivos ($+\infty$) o tremendamente negativos ($-\infty$)?

Es lo que se conoce como límites en el infinito que, según casos, generan los conceptos de asíntota horizontal y asíntota oblícua (como aquellos valores a los que la gráfica se acerca indefinidamente, cada vez más, para valores en el infinito de la variable x).

La notación es la siguiente:

$\lim_{x \to \infty} f(x)$ → Límite de la función cuando x tiende a $+\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x)$ → Límite de la función cuando x tiende a $-\infty$

No tiene sentido preguntarnos por límites laterales en el infinito (es decir, a la izquierda y derecha de $\pm\infty$). Directamente estudiamos el límite, siguiendo una serie de reglas (algunas ya son conocidas de clases anteriores, y otras iremos presentándolas conforme realicemos ejemplos más complicados).

Algunos ejemplos

Una función puede dispararse cuando x tiende a infinito, como por ejemplo la parábola $f(x)=x^2$.

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$$

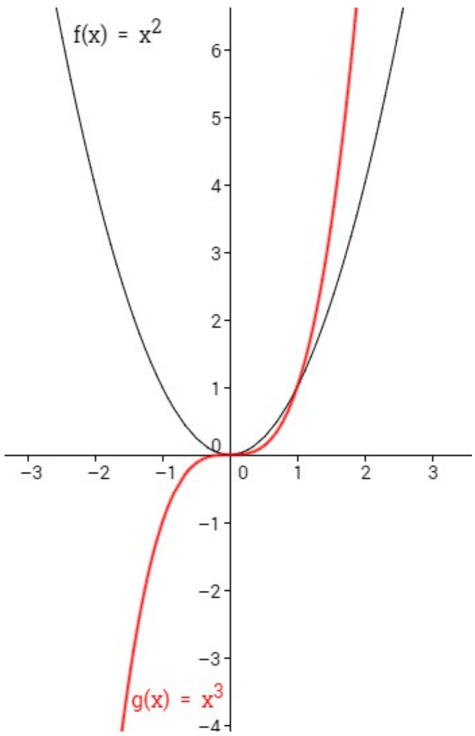
Ambos límites tienden a $+\infty$.

La función $g(x)=x^3$, por su parte, presenta los siguientes valores en el infinito.

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

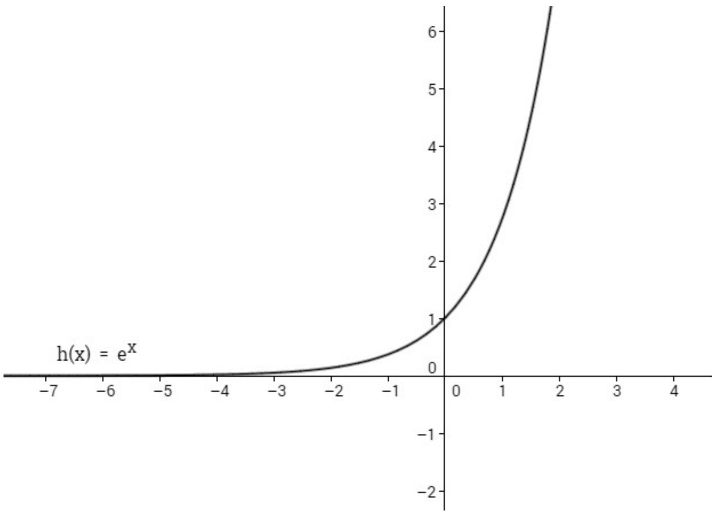
Las gráficas siguiente ratifican los resultados analíticos obtenidos.



La siguiente función $h(x)=e^x$ va a converger en valores de la x tremendamente negativos pero se dispara para valores de x tremendamente positivos.

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ $\rightarrow$ Asíntota horizontal $y=0$ para valores de $x \rightarrow -\infty$



La función $i(x)=\frac{\ln(x)}{e^x}$, además de poseer una asíntota vertical en $x=0$, posee una asíntota horizontal $y=0$ para valores tremendamente positivos de x .

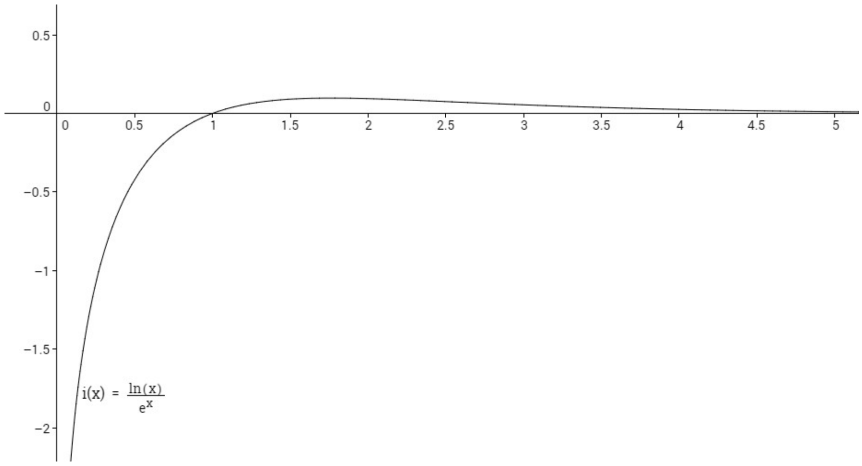
$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{e^x}=0$ $\rightarrow$ Asíntota horizontal $y=0$ para valores de $x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(x)}{e^x}=\nexists$$

El límite $\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(x)}{e^x}=\nexists$ es un ejemplo de que una cosa significa que el límite no exista, y otra cosa bien distinta implica que el límite valga infinito. Como ya hemos repetido varias veces en este tema, es importante no confundir ambos conceptos.

En la siguiente gráfica mostramos la curva $i(x)=\frac{\ln(x)}{e^x}$, donde podrás apreciar que la asíntota horizontal $y=0$ es cortada por la función en el punto $x=1$.

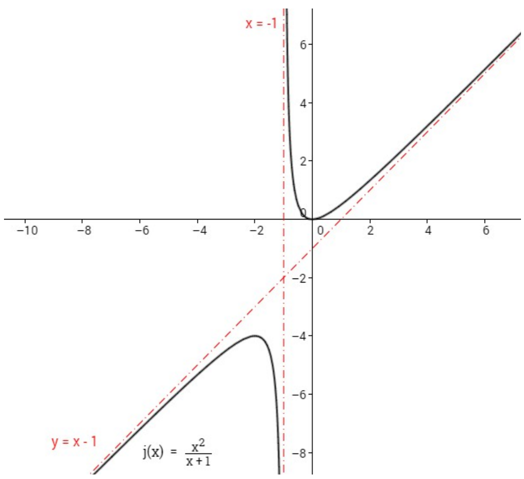
¿Cómo es posible, si es una asíntota? Porque el comportamiento de acercarse cada vez más y más a la asíntota, sin tocarla, se da para valores enormes $x \rightarrow +\infty$.



Por último presentamos un ejemplo de gráfica con asíntota oblicua con la función $j(x)=\frac{x^2}{x+1}$, que posee además una asíntota vertical en $x=-1$.

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x+1}=x-1$ → Asíntota oblicua $y=x-1$ para valores $x\to+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x+1}=x-1$ → Asíntota oblicua $y=x-1$ para valores $x\to-\infty$



Poco a poco aprenderemos a resolver por nosotros solos, analíticamente, estos límites. ¡Paciencia, todo llegará!