

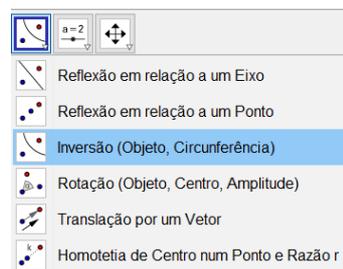


### Outras transformações geométricas – a Inversão

A Inversão é uma transformação geométrica que não mantém a igualdade geométrica dos comprimentos correspondentes, nem a igualdade geométrica dos ângulos correspondentes, ou seja, a forma dos objetos não é mantida.

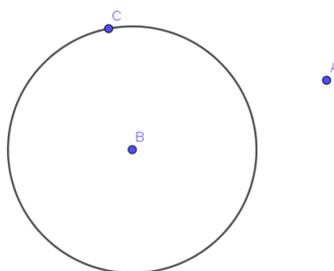
No GeoGebra, a Inversão acede-se a partir do mesmo botão onde estão outras transformações geométricas (Reflexão, Translação, etc.).

Para definir a Inversão, precisamos de um ponto e uma circunferência.

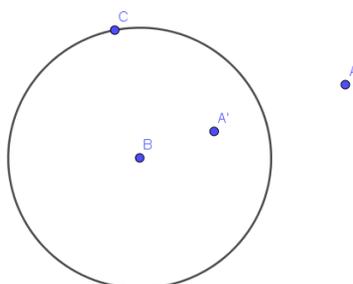


1. A ferramenta pode ser usada para um objeto geométrico qualquer (ponto, segmento, polígono, ...). Vamos usá-la para um ponto.

Começa por criar um ponto A e uma circunferência com centro em B e que contém C.



Vamos aplicar a inversão. Repara na ordem de seleção dos objetos: primeiro o objeto (neste caso o ponto A), depois a circunferência. Depois de indicados estes elementos, surge no ecrã o ponto imagem, neste caso A'.



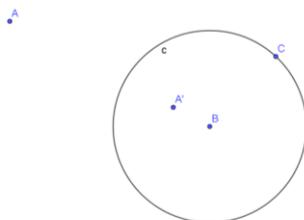
Investiga o que acontece na inversão. Para tal, faz variações na posição do ponto A relativamente à circunferência. O que acontece a A'?

Ao fazer a inversão, o ponto A, antes fora da circunferência, passa a estar dentro desta.

- **quando afastamos A da circunferência?**

### Figura 1

*Representação da resolução feita pela aluna no GGB, relativamente ao afastamento do ponto A, da circunferência.*



Ao afastar o ponto A da circunferência, o ponto A' aproxima-se do centro da circunferência (isto para qualquer direção que se mova A, desde que este se afaste da circunferência). No entanto, aproxima-se ao centro da circunferência, mas a uma “velocidade” cada vez menor. Ou seja, a relação entre a aproximação de A' ao centro da circunferência e o afastamento de A da circunferência não é a mesma, isto é, mostra uma razão de proporcionalidade inversa.

- **quando A é um ponto da circunferência?**

Quando A é um ponto da circunferência, A' passa a coincidir com o ponto A.

- **quando A está no interior da circunferência?**

Quando A está dentro da circunferência, A' fica fora dessa circunferência.

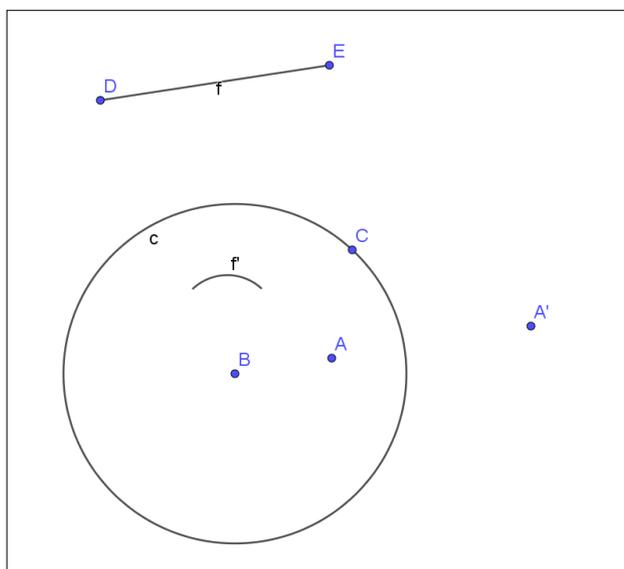
- quando A se aproxima do centro da circunferência?

Quando aproximamos A do centro, A' afasta-se bastante da circunferência. E o ponto A consegue sobrepor-se ao centro da circunferência. Há uma espécie de proporcionalidade inversa (mas temos de a provar).

2. Constrói agora um segmento a partir de dois pontos livres. Constrói a inversão do segmento relativamente à circunferência. Faz variar a posição do segmento relativamente à circunferência e regista todas as tuas descobertas.

**Figura 2**

*Representação da construção inicial para a resolução da questão 2 (segmento  $-f$ , inversão do segmento  $-f'$ ), usando o GGB.*



Com a inversão do segmento  $f$ , relativamente à circunferência, obtém-se um arco de circunferência  $f'$  (no seu interior). Ao aumentar o segmento, também o arco aumenta, começando a fechar-se (mas nunca o faz).

Ao aproximar o segmento da circunferência, esse arco vai sair da circunferência.

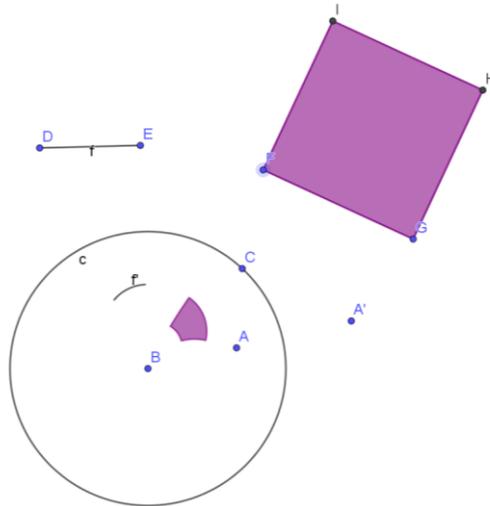
Se passarmos o segmento pelo centro da circunferência, criando o diâmetro, obtemos uma reta infinita, que coincide com o segmento.

Quando deslocamos parte do segmento para o interior da circunferência, há uma sobreposição do arco com o segmento, sendo que o arco passa a ser uma reta, ficando com pontos colineares, entre segmento e arco/reta.

3. Repete a investigação, desta vez com um quadrado.

**Figura 3**

*Representação da construção para a resolução da questão 3, usando o GGB.*

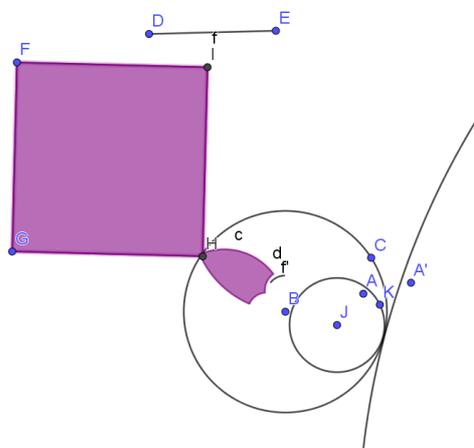


Ao fazermos a inversão do quadrado, relativamente à circunferência, obtemos uma figura geométrica com um lado reto e três curvos (Figura 3).

Ao aproximarmos o quadrado do centro da circunferência, um dos seus vértices fica sobreposto ao da figura, até que se sobrepõem (Figura 4). Continuando a aproximar o quadrado do centro da circunferência, a sua inversão “sai” da circunferência, fechando pelo exterior desta, deixando um espaço branco dentro da circunferência (que se assemelha à forma de uma borboleta (figura 5) ou flor (figura 6)).

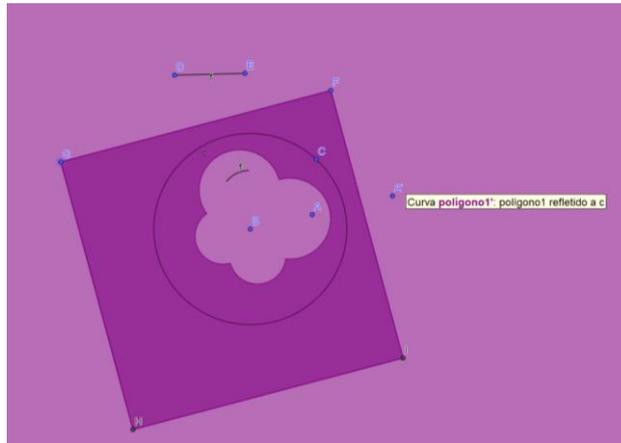
**Figura 4**

*Representação da construção do quadrado e da sua inversão, usando o GGB.*



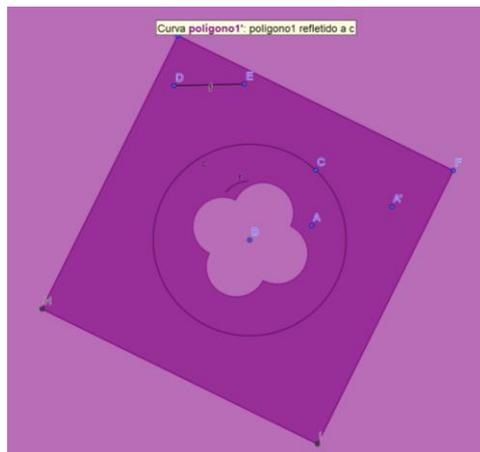
**Figura 5**

Representação da construção do quadrado e da sua inversão, usando o GGB.



**Figura 6**

Representação da construção do quadrado e da sua inversão, usando o GGB.



4. Vamos procurar chegar à expressão algébrica que define uma inversão. Para tal, vamos determinar a distância de  $A'$  (a imagem de  $A$ ) ao centro da circunferência em função da distância de  $A$  ao centro:

$$D_{A'} = ?$$

Para tal, faz experiências que te ajudem a chegar a esta expressão. Por exemplo, será que esta distância depende do valor do raio da circunferência? Faz variar o raio, incluindo valores que sejam úteis (como 1, 2 e 3). Como podemos traduzir algebricamente a noção de que quanto maior é um valor, menor é o outro?

- Colocar a distância entre centro e ponto; centro e ponto de inversão.
- Mexer o raio da circunferência e perceber o que acontece: a distância do centro ao ponto não altera, mas a do ponto de inversão (objeto) sim – logo, é afetada pelo raio.

Distância do centro ao ponto= 2 (chamamos de x)

Distância do centro ao inverso= 0,5=1/2 (chamamos de y)

Então:  $y=1/x$

Será  $Y=raio/x$ ?

x	y	k	Y= Raio <sup>2</sup> /2
Distancia do centro ao ponto	Distancia do centro ao inverso	raio	Raio <sup>2</sup>
2	1/2	1	1
2	2	2	4
2	9/2=4.5	3	9
2	8	4	16
2	12.5	5	25

Pela análise da tabela onde se testou a fórmula para diferentes medidas, conseguimos provar que a fórmula é válida, isto é, a distância do centro ao inverso é igual a metade do raio da circunferência.

\*\*

### Exploração

- A inversão de uma circunferência dá uma circunferência.
- Quando temos a circunferência inicial dentro da normal, e a aproximamos do centro, maior fica a inversa, e o seu raio fica “infinito”.

