Teoría – Tema 1

Teoría - 9 - valor absoluto en ecuaciones e inecuaciones

Valor absoluto de un número real

El valor absoluto de un número real a se escribe $|a|$ y es el mismo número a cuando es positivo o cero, y opuesto de a cuando es negativo. Se define como:

$$|a|=\begin{Bmatrix} -a & si & a<0 \\ a>0 & si & a\geq 0\end{Bmatrix}$$

El valor absoluto cumple las siguientes propiedades:

$$|a|=|-a|$$
$$|a-b|=0 \Leftrightarrow a=b$$
$$|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$$
$$|\frac{a}{b}|=\frac{|a|}{|b|}, \quad si \quad b\neq 0$$
$$|a+b|\leq|a|+|b|$$
$$|a-b|\leq|a-c|+|c-b|$$
$$|a-b|\geq||a|-|b||$$
$$|a|\leq b \Leftrightarrow -b\leq a\leq b \quad \rightarrow \quad a\in[-b,b]$$
$$|a|\geq b \Leftrightarrow \{a\leq -b\}\cup\{a\geq b\}$$

Podemos ver el valor absoluto como la distancia del número al origen 0 de la recta real. Y las distancias, por definición, siempre son positivas.

Valor absoluto en una ecuación

En las ecuaciones que contienen valor absoluto hay una norma muy importante que debemos aprender desde ya: **no se puede operar con valor absoluto**.

Para "eliminar las barras del valor absoluto" debemos obtener las raíces del argumento contenido dentro del valor absoluto, y aplicar la definición general: donde sea positivo se quitan las barras, y donde sea negativo se quitan las barras y se antepone un signo negativo.

Si en el argumento aparecen cociente de polinomios, debemos obtener las raíces del numerador y del denominador.

Pero en algunos casos el proceso es mucho más sencillo: si el valor absoluto de la ecuación está igualada a un número, se pueden quitar las barras y colocar los signos + - delante del número.

Ejemplo 1 resuelto

Resuelve $|x-3|=5$

Razonamos de la siguiente manera: $x-3=\pm 5$ → resolvemos las dos ecuaciones

$x-3=5 \quad \rightarrow \quad x=8$

$x-3=-5 \quad \rightarrow \quad x=-2$

Ejemplo 2 resuelto

Resuelve $2x+|x^2-9|=15$

Dejamos solo en un miembro el polinomio contenido dentro del valor absoluto.

$|x^2-9|=15-2x$

Igualamos el argumento del valor absoluto a 0 → $x^2-9=0 \quad \rightarrow \quad x=\pm 3$

Con estas raíces vemos el signo del argumento en los diferentes intervalos.

$(-\infty,-3)$ → Tomo por ejemplo $x=-10 \quad \rightarrow \quad (-10)^2-9=91>0$ → Quitar barras

$(-3,3)$ → Tomo por ejemplo $x=0 \quad \rightarrow \quad 0^2-9=-9<0$ → Quitar barras y anteponer signo negativo

$(3,\infty)$ → Tomo por ejemplo $x=10 \quad \rightarrow \quad (10)^2-9=91>0$ → Quitar barras

Con esto, la ecuación de partida se rompe en tres ecuaciones diferentes (una para cada intervalo).

$$\left\{\begin{matrix} si\ x<-3 \rightarrow x^2-9=15-2x \rightarrow x^2+2x-24=0 \\ si\ -3\leq x\leq 3 \rightarrow -(x^2-9)=15-2x \rightarrow -x^2+2x-6=0 \\ si\ x>3 \rightarrow x^2-9=15-2x \rightarrow x^2+2x-24=0 \end{matrix}\right\}$$

Debemos resolver cada ecuación. **Las soluciones serán válidas siempre que pertenezcan a cada uno de los intervalos en que está definida la ecuación.**

Fíjate que las ecuaciones para $x<-3$ y para $x>3$ son idénticas.

$x^2+2x-24=0$ → soluciones → $x=-6$ para intervalo $x<-3$ y $x=4$ para $x>3$.

$-x^2+2x-6=0$ → No tiene solución → No hay solución para el intervalo $[-3,3]$.

Ejemplo 3 resuelto

Resuelve $\left|\frac{x}{x+2}\right|=x-4$

Raíz del numerador del argumento: $x=0$

Raíz del denominador del argumento: $x+2=0 \rightarrow x=-2$

Evaluamos el argumento en el interior de los siguientes intervalos:

$(-\infty,-2)$ → por ejemplo $x=-10 \rightarrow \frac{-10}{-10+2}>0$ → quitar las barras

$(-2,0)$ → por ejemplo $x=-1 \rightarrow \frac{-1}{-1+2}<0$ → quitar las barras y anteponer signo negativo

$(0,\infty)$ → por ejemplo $x=7 \rightarrow \frac{7}{7+2}>0$ → quitar las barras

Así obtenemos tres ecuaciones. Cada ecuación es válida en un intervalo concreto. Para el primer y el tercer intervalo, las ecuaciones que salen son idénticas:

$(-\infty,-2)$ y $[0,\infty)$ → $\frac{x}{x+2}=x-4 \rightarrow x=(x+2)(x-4) \rightarrow x=x^2-2x-8 \rightarrow$ $0=x^2-3x-8$ → Resolver ecuación de segundo grado → $x=4{,}70$ solución válida para el intervalo $[0,\infty)$ y $x=-1{,}70$ no pertenece a ninguno de los dos intervalos para los que está definida la ecuación.

(-2,0] → $\frac{-x}{x+2}=x-4 \rightarrow -x=(x+2)(x-4) \rightarrow -x=x^2-2x-8 \rightarrow 0=x^2-x-8 \rightarrow$

Resolver la nueva ecuación de segundo grado → $x=3{,}37$ no pertenece al intervalo de definición de la ecuación y $x=-2{,}37$ tampoco pertenece al intervalo de definición. Por lo que no hay solución en el intervalo (-2,0] .

Dos o más valores absolutos en una ecuación

Si aparecen varios valores absolutos en una ecuación, obtenemos las raíces de todos los argumentos y evaluamos en cada uno de los intervalos que forman.

Resolvemos la ecuación asociada a cada intervalo y comprobamos si las soluciones pertenecen a dicho intervalo.

Ejemplo 4 resuelto

Resuelve $|x+4|=1-|x-6|$

Igualamos cada argumento del valor absoluto a cero, para sacar sus raíces.

$x+4=0 \rightarrow x=-4$

$x-6=0 \rightarrow x=6$

Aparecen tres intervalos. Debemos evaluar el argumento de cada valor absoluto en cada uno de esos intervalos.

Intervalo	signo argumento de $|x+4|$	signo argumento de $|x-6|$
$(-\infty,-4) \rightarrow x=-10$	-	-
$(-4,6) \rightarrow x=0$	+	-
$(6,\infty) \rightarrow x=20$	+	+

Rompemos la ecuación en cada intervalo:

$$\left\{\begin{matrix}(-\infty,-4):-(x+4)=1-(-(x-6))\\ [-4,6]:x+4=1-(-(x-6))\\ (6,\infty):x+4=1-(x-6)\end{matrix}\right\} \rightarrow \text{operar} \rightarrow \left\{\begin{matrix}(-\infty,-4):-x-4=1+x-6\\ [-4,6]:x+4=1+x-6\\ (6,\infty):x+4=1-x+6\end{matrix}\right\}$$

Resolvemos cada ecuación, y comprobamos que las soluciones pertenezcan al intervalo en que están definidas.

$$\left\{\begin{matrix}(-\infty,-4):-2x=-1\rightarrow x=\frac{1}{2}\notin(-\infty,-4)\\ [-4,6]:0=-9\rightarrow absurdo\,matemático\\ (6,\infty):2x=3\rightarrow x=\frac{3}{2}\notin(6,\infty)\end{matrix}\right\} \rightarrow \text{El ejercicio no tiene solución}$$

Valores absolutos insertados uno dentro de otro

Si encontramos un valor absoluto dentro de otro valor absoluto, debemos romper de dentro hacia fuera. Y razonar de la misma forma a la planteada en problemas anteriores.

Suelen ser problemas largos, donde debemos estar muy atentos a los intervalos donde estamos trabajando. Y comprobar si las soluciones obtenidas pertenecen a esos intervalos.

Ejemplo 5 resuelto

Resuelve $|x+|2x+8||+x=4$

Rompemos el valor absoluto interior.

$2x+8=0 \rightarrow x=-4$

Aparecen dos intervalos.

Intervalo	**signo argumento de** $|2x+8|$
$(-\infty,-4) \rightarrow x=-10$	-
$(-4,\infty) \rightarrow x=0$	+

Llegamos a dos ecuaciones (una por intervalos) donde aparece un nuevo valor absoluto en cada ecuación.

$$\begin{Bmatrix} (-\infty,-4):|x-(2x+8)|+x=4 \\ [-4,\infty):|x+2x+8|+x=4 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{operar} \rightarrow \begin{Bmatrix} (-\infty,-4):|-x-8|+x=4 \\ [-4,\infty):|3x+8|+x=4 \end{Bmatrix}$$

En cada ecuación debemos romper su correspondiente valor absoluto.

Para $(-\infty,-4) \rightarrow -x-8=0 \rightarrow x=-8$

Intervalo	**signo argumento de** $|-x-8|$
$(-\infty,-8) \rightarrow x=-10$	+
$(-8,-4) \rightarrow x=-6$	-

Resolver cada ecuación

$(-\infty,-8) \rightarrow -x-8+x=4 \rightarrow 0=12$ → absurdo matemático

$(-8,-4) \rightarrow -(-x-8)+x=4 \rightarrow 2x=-4 \rightarrow x=-2\notin(-8,-4)$ → no hay solución

Para $(-4,\infty) \rightarrow 3x+8=0 \rightarrow x=\frac{-8}{3}$

Intervalo	**signo argumento de** $\|3x+8\|$
$(-4,-\frac{8}{3}) \rightarrow x=-3$	-
$(\frac{-8}{3},\infty) \rightarrow x=0$	+

Resolver cada ecuación

$(-4,-\frac{8}{3}) \rightarrow -(3x+8)+x=4 \rightarrow -2x=12 \rightarrow x=-6\notin(-4,-\frac{8}{3})$ → no hay solución

$(\frac{-8}{3},\infty) \rightarrow 3x+8+x=4 \rightarrow 4x=-4 \rightarrow x=-1\in(\frac{-8}{3},\infty)$ → **sí es solución**

Valores absolutos en inecuaciones

La regla general es bien sencilla: romper los valores absolutos que aparezcan y resolver cada inecuación en su intervalo asociado.

Ejemplo 6 resuelto

Resuelve $|x+5|\leq 4$

El razonamiento es bien sencillo en este caso, ya que el argumento del valor absoluto debe oscilar entre -4 y +4 por aparecer en un lado un valor absoluto y en otro lado de la desigualdad un número positivo.

$-4\leq x+5\leq 4$

Obtenemos dos inecuaciones por separado.

$-4\leq x+5 \quad \rightarrow \quad -9\leq x$

$x+5\leq 4 \quad \rightarrow \quad x\leq -1$

La solución final será la intersección de ambas soluciones individuales.

$-9\leq x\cap x\leq -1 \quad \rightarrow \quad [-9,-1]$

Ejemplo 7 resuelto

Resuelve $|x+5|>2-3x$

Rompemos el valor absoluto, y tendremos una inecuación para cada intervalo.

$x+5=0 \quad \rightarrow \quad x=-5$

Intervalo	**signo argumento de** $|x+5|$
$(-\infty,-5) \quad \rightarrow \quad x=-10$	-
$(-5,\infty) \quad \rightarrow \quad x=0$	+

Para $(-\infty,-5) \quad \rightarrow \quad -(x+5)>2-3x$

Resolver $\rightarrow$ $-x-5>2-3x \quad \rightarrow \quad 2x>7 \quad \rightarrow \quad x>\frac{7}{2}\notin(-\infty,-5)$ $\rightarrow$ no hay solución

Para $(-5,\infty) \quad \rightarrow \quad x+5>2-3x$

Resolver $\rightarrow$ $4x>-3 \quad \rightarrow \quad x>\frac{-3}{4}\in(-5,\infty)$ $\rightarrow$ el intervalo solución resulta: $(\frac{-3}{4},\infty)$